اختبــار 1

الدرجة
......
٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٢ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢] - {٤}

٣ جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^٣$

٤ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى ٣ سم

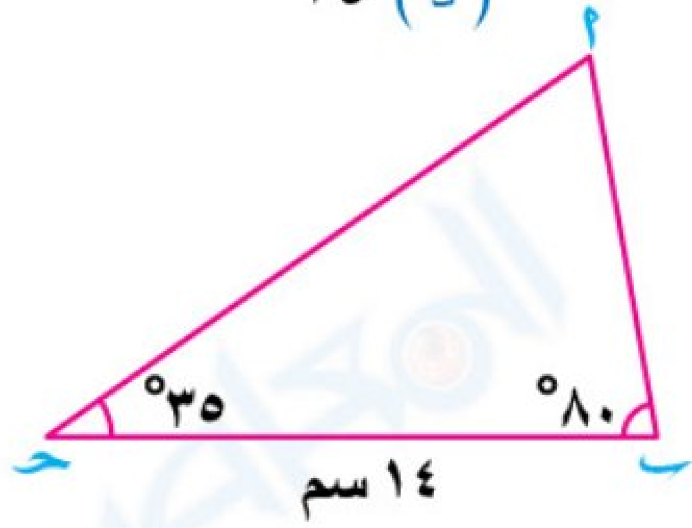
وكان جا أ + جا ب + جا حـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

٥ طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم ≃ .... سم. (لأقرب عدد صحيح)

(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤



٦ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ك}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ± ٢

٧ الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢[

٨ إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٧ د (٣) + ٣ د (-٣)}{٢ د (-٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٥ (د) -٠,٥

٩ إذا كانت : د (س) = س - ٣ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٢ (د) ٢٥

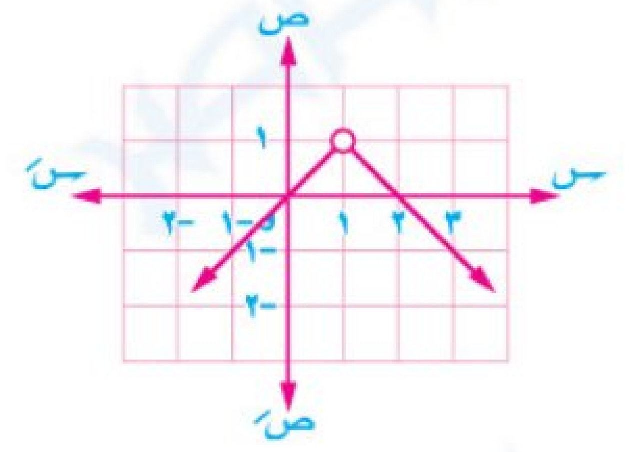
١٠ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، −١)

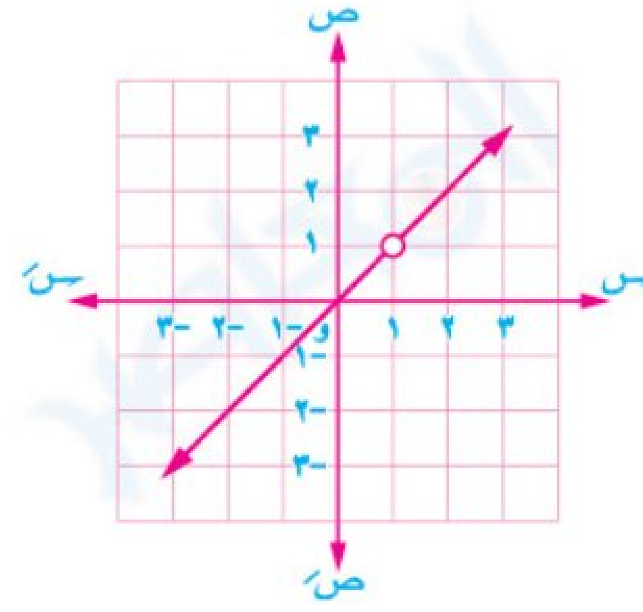
١١ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

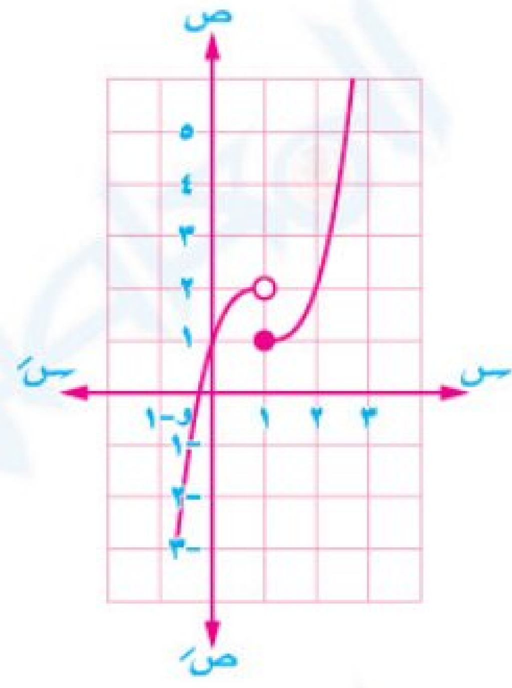
١٢ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



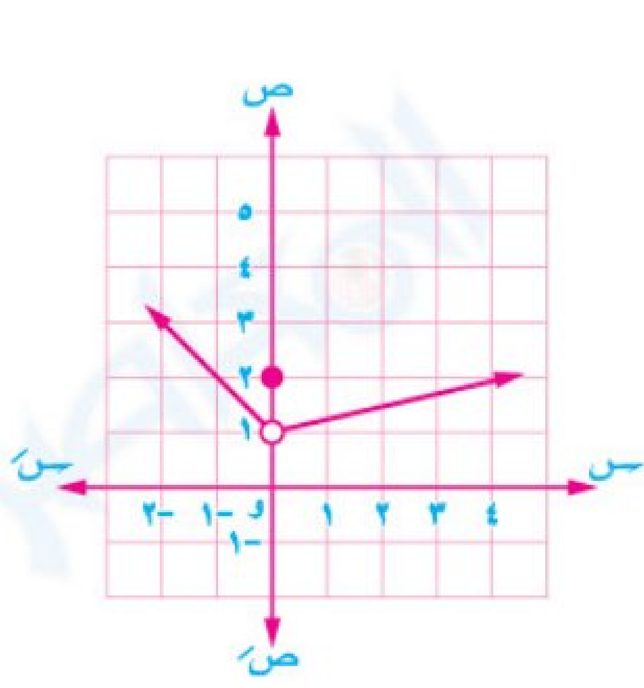
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \quad ٠ < س \\ -س^{٢} - ١ & ، \quad ٠ > س \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها. **(درجتان)**

٢ إذا كان : د (س) = $س^{٢} - ٣$ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣) **(درجتان)**

٣ أوجد : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١}$ **(درجتان)**

٤ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب جـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم. **(درجتان)**

الدرجة
....
٢٠

اختبار 2

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

١ فى المثلث ٩ ب حـ يكون $\frac{\text{٤ ب}}{\text{جا ب}}$ = ... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٩ ب حـ

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

٢ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : نهـا د (س) عندما س ← ٢ = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) -١ (د) غير موجودة.

٣ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$ (ب) د (س) = -٢

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

٤ إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (-٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ فإن م = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]-∞ ، ٣]

٦ إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ - ١ فإن : (د ○ ر) (-٣) = ...

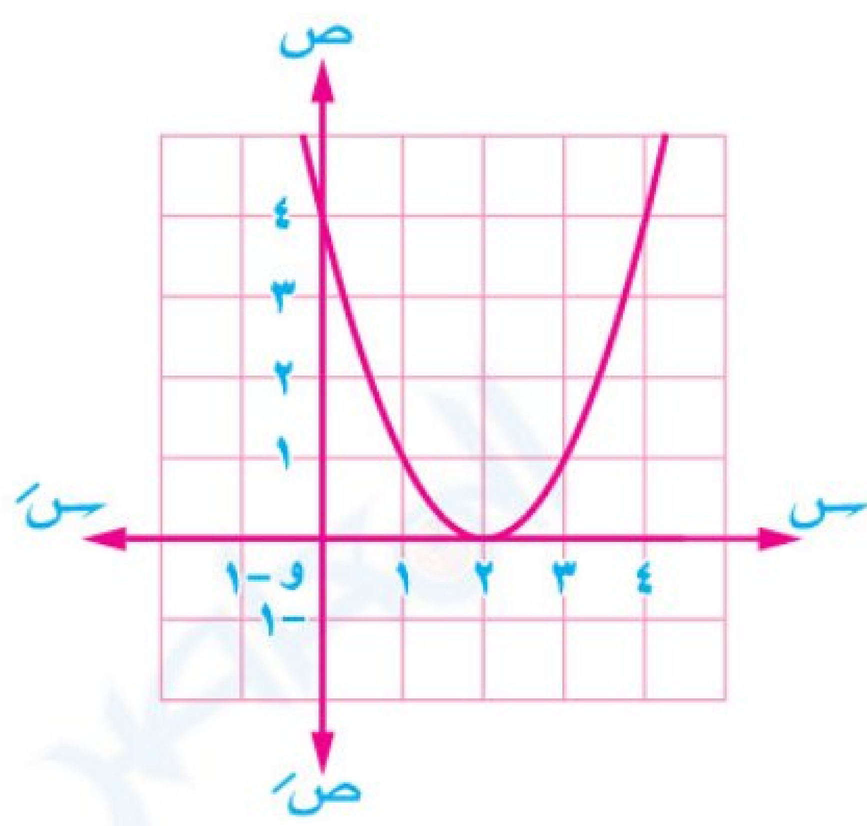
(أ) ٢ (ب) -٤ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

٧ نهـا عندما س ← ٧ $\frac{س^٢ - ٤٩}{س - ٧}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) -٤٩ (جـ) ٤٩ (د) -١٤

٨ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^٣$ + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (-٢ ، ١) (د) (-١ ، -٢)



٩ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...

حيث د : ح ⟵ ح

(أ) $س^٢ + ٢$

(ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $س^٢ - ٤ س + ٤$

(د) $-(س - ٢)^٢$

١٠ إذا كان : $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ل}{س - ٣} = م$ فإن : (ل ، م) = ...

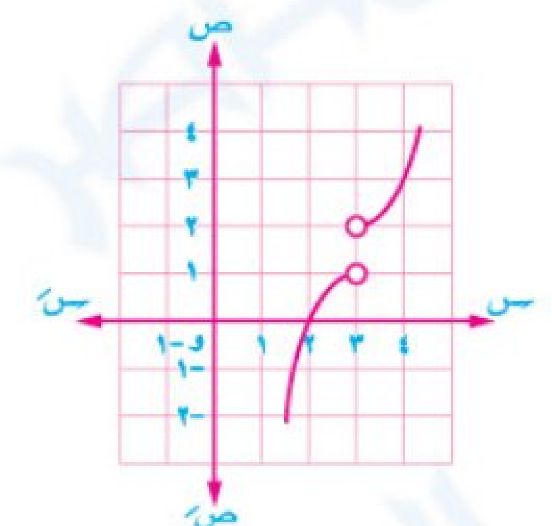
(أ) (٣ ، ٣) (ب) (-٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

١١ فى Δ س ص ع إذا كان ق (د س) : ق (د ص) : ق (د ع) = ٢ : ٣ : ١

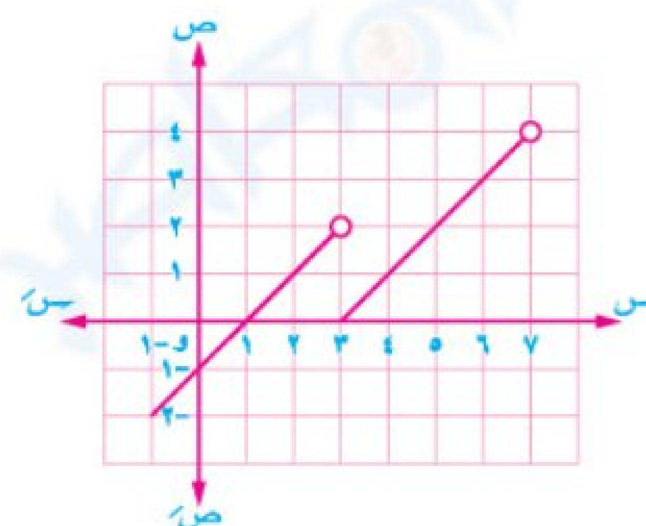
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) $٣ : \sqrt{٢} : ١$ (ب) $\sqrt{٣} : ٢ : ١$ (جـ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣} : ١$ (د) ٢ : ٣ : ١

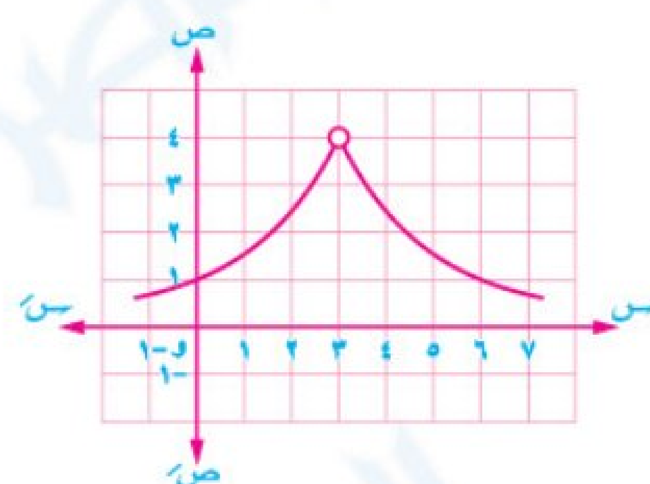
١٢ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟



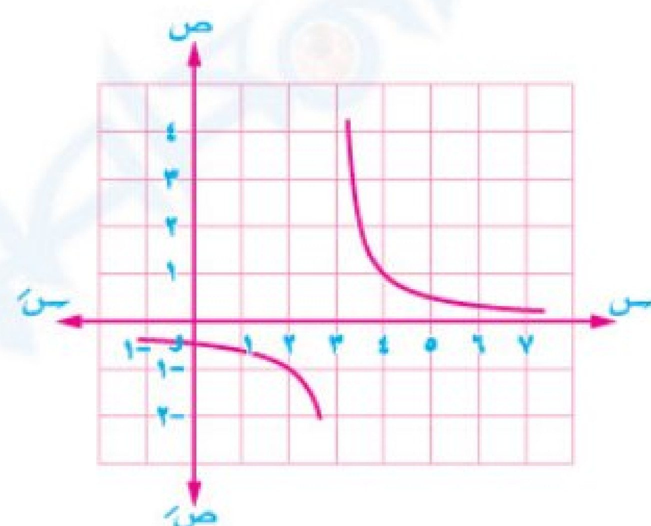
(أ)



(ب)



(جـ)

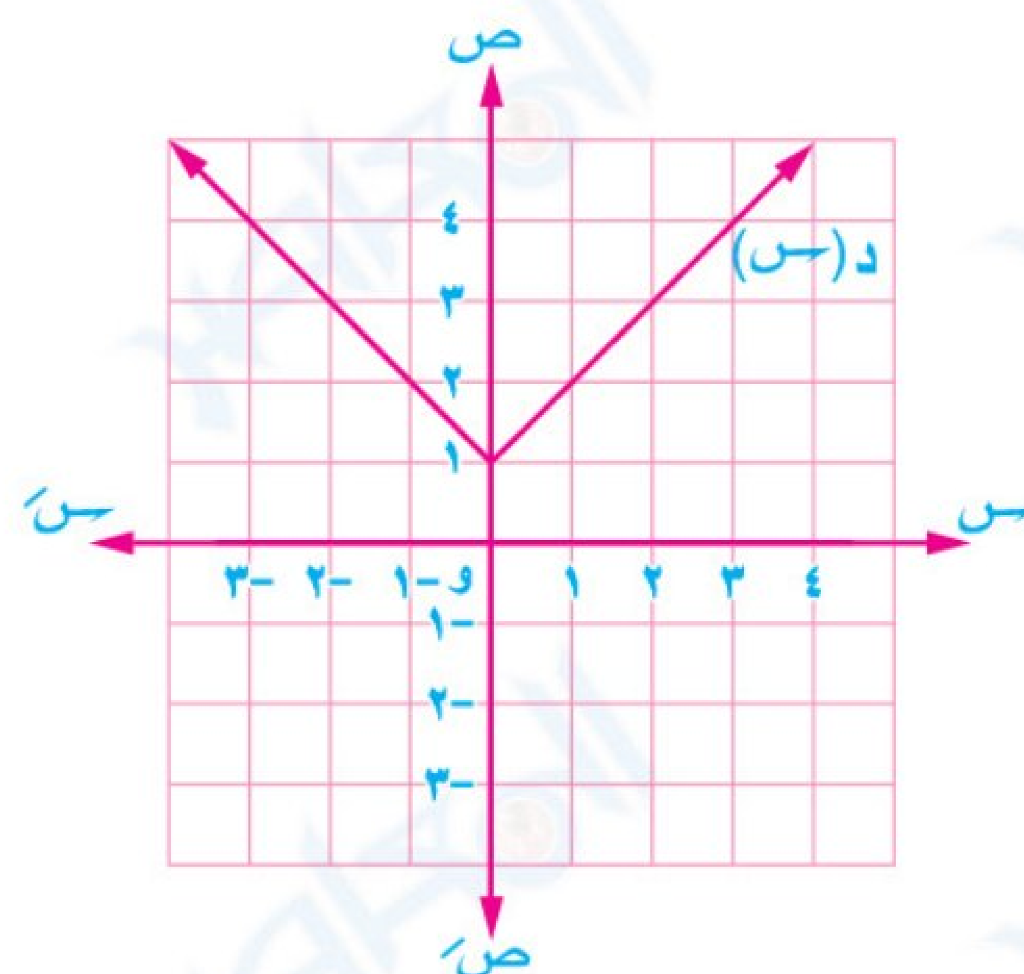


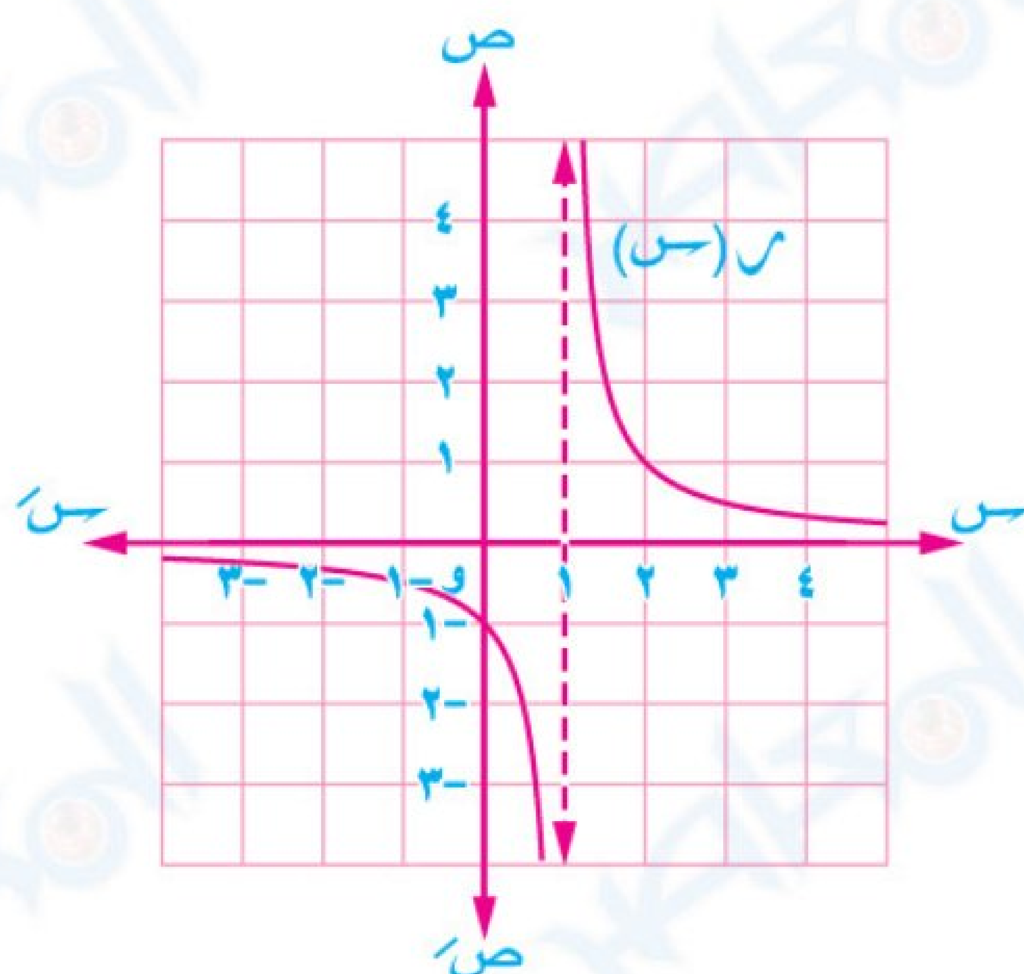
(د)

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

١ ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. **(درجتان)**

٢ من الشكلين التاليين : **(درجتان)**





أوجد (د ∘ ر) (س) مبينًا المجال.

٣ أوجد : $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س + ١١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$ **(درجتان)**

٤ في الشكل المقابل :



م دائرة ، أب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : ١ محيط Δ أ ب حـ

٢ مساحة سطح الدائرة م **(درجتان)**

إجابة اختبـــار 1

١
١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (جـ) ٤ (جـ) ٥ (جـ)
٦ (أ) ٧ (د) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (أ)
١١ (د) ١٢ (جـ)

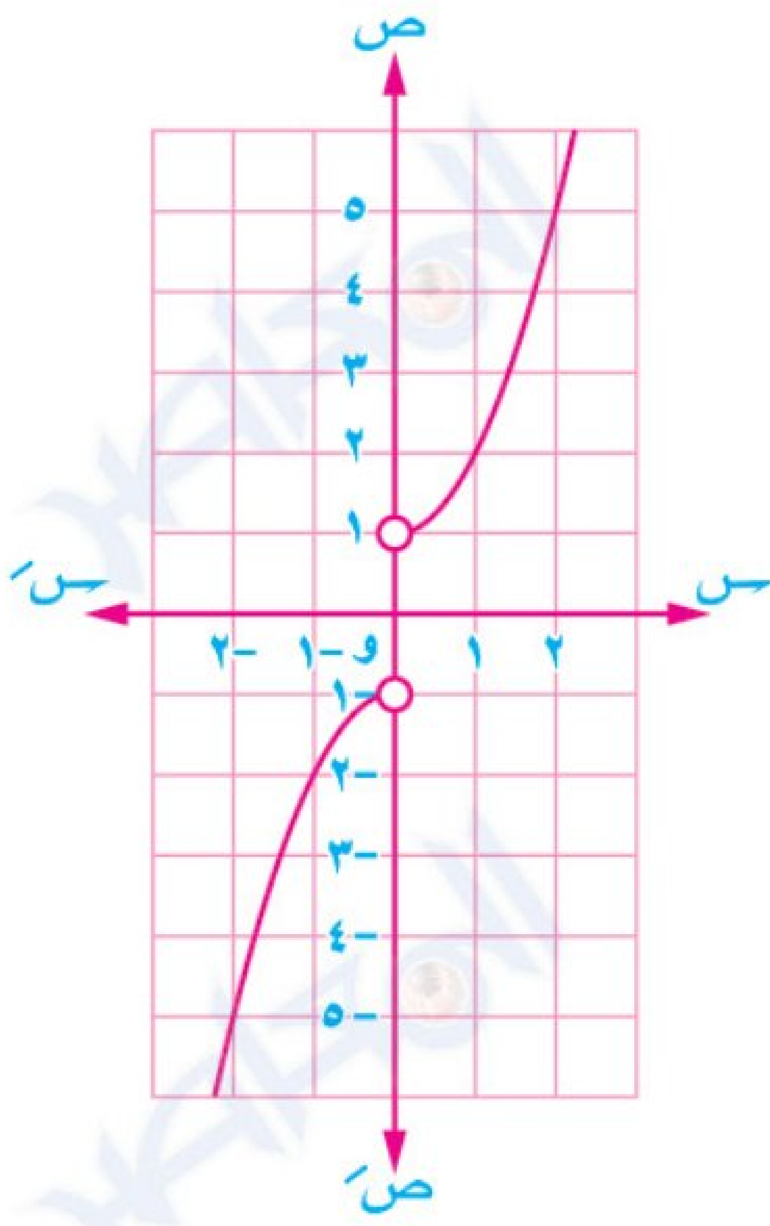
٢
١ من الرسم :

- مدى الدالة د

$= ح -]-١ ، ١[$

- الدالة تزايدية

في $ح - \{٠\}$



٢ ∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = د(\sqrt{س - ٢}) = (\sqrt{س - ٢})^٢ - ٣ = س - ٢ - ٣ = س - ٥$

، ∵ $م_١ =$ مجال $ر = [٢ ، ∞[$

، قيم س التى تجعل $ر(س)$ فى مجال د هى $م_٢ = ح$

∴ مجال $(د \circ ر) = م_١ \cap م_٢ = [٢ ، ∞[$ ، $(د \circ ر)(٣) = ٣ - ٥ = -٢$

٣ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}{\sqrt{٤س + ٥} + ٣} = \lim_{س \to ١} \frac{٤س + ٥ - ٩}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

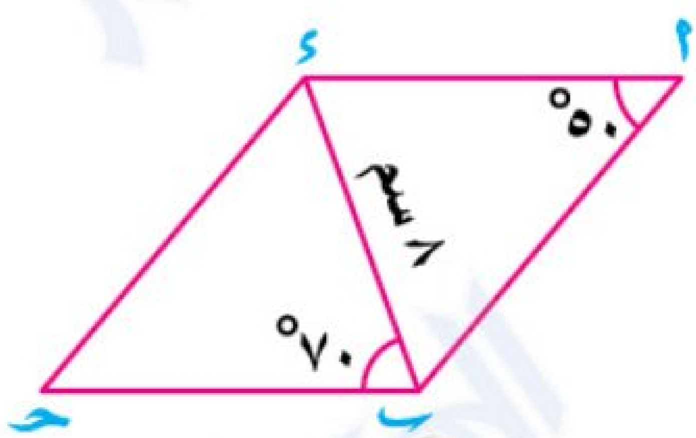
٤ ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

∴ $ق(\angle حـ) = ٥٠°$

فى Δ ب ء حـ : $ق(\angle ب ء حـ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°$

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$ ∴ ب حـ ≃ ٩ سم ، ء حـ ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء) ≃ ٣٨ سم



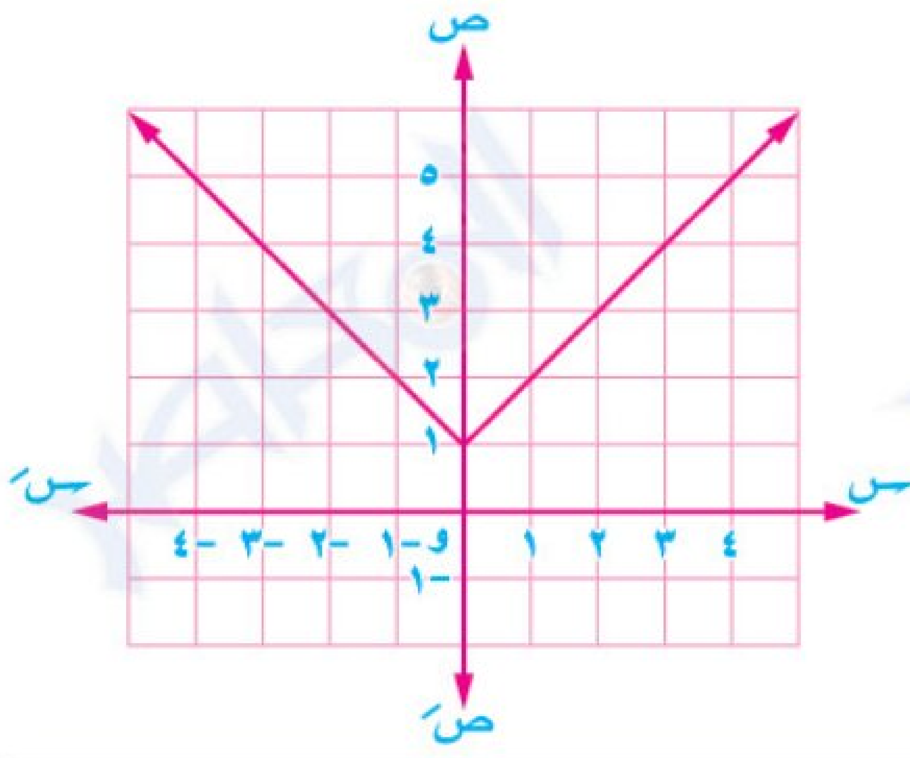
إجابة اختبــــار 2

١

١ (ب)	٢ (د)	٣ (د)	٤ (د)	٥ (جـ)
٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (أ)	٩ (جـ)	١٠ (جـ)
١١ (ب)	١٢ (جـ)			

---

٢ ١ من الرسم :



- المدى = [١ ، ∞[
- الاطراد :

الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

- النوع : الدالة زوجية.

---

٢ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}| + ١$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١}$

∴ $(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}[\text{ر}(\text{س})] = \text{د}\left(\frac{١}{\text{س} - ١}\right) = \left|\frac{١}{\text{س} - ١}\right| + ١$

، $\text{م}_١$ = مجال ر = ح − {١} ، قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د هى $\text{م}_٢$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

---

٣ $\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\sqrt{\text{س} + ١١} - ٤}{\text{س}^٢ - ٢٥} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤}{\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤} = \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{س} + ١١ - ١٦}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)\left(\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤\right)}$

$= \lim_{\text{س} \to ٥} \frac{١}{(\text{س} + ٥)\left(\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤\right)} = \frac{١}{(٥ + ٥)\left(\sqrt{٥ + ١١} + ٤\right)} = \frac{١}{٨٠}$

---

٤ فى Δ أ ب جـ :



ق(∠جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠أ م ب) = ٤٠°

، ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ $\frac{٥}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٥٥°} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا } ٨٥°} = ٢ \text{ نق} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{جا } ٤٠° + \text{جا } ٥٥° + \text{جا } ٨٥°}$

∴ محيط Δ أ ب جـ ≃ ١٩,١٢ سم ، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π $\text{نق}^٢$ = π $(٣,٨٩)^٢$ ≃ ٤٧,٥ $\text{سم}^٢$



اختبـار ١

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢] - {٤}

(٣) جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^٣$

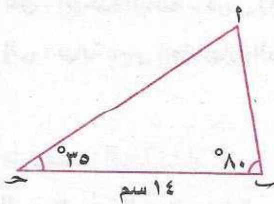
(٤) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى ٣ سم

وكان حا أ + حا ب + حا حـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم = ... سم.

(لأقرب عدد صحيح)



(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤

(٦) إذا كانت : $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ - ك}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ± ٢

(٧) الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢[

(٨) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٧ د (٣) + ٣ د (-٣)}{٢ د (-٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٥ (د) -٥ , ٠

(٩) إذا كانت : د (س) = س - ٣ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٢ (د) ٢٥

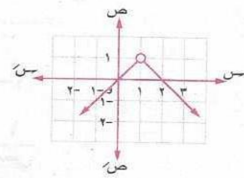
(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

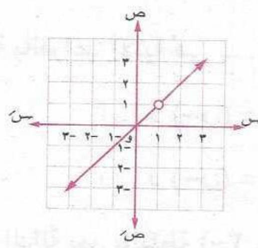
(١١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

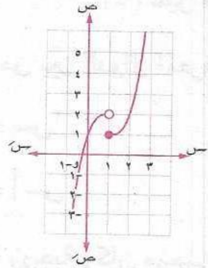
(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



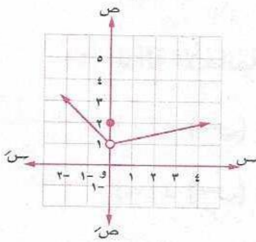
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س > ٠ \\ -س^٢ - ١ & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها. (درجتان)

(٢) إذا كان : د (س) = $س^٢$ - ٣ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣) (درجتان)

(٣) أوجد : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١}$ (درجتان)

(٤) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب جـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم. (درجتان)

اختبار ٢

الدرجة

٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) فى المثلث أ ب ح يكون $\frac{٤ ب}{جا ب}$ = ... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(ج) −١ (د) غير موجودة.

(٣) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$ (ب) د (س) = −٢

(ج) د (س) = |س| (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

(٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ ، فإن م = ...

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ١ (د) ٢

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (ج) [٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣]

(٦) إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ١

فإن : (د ∘ ر) (−٣) = ...

(أ) ٢ (ب) −٤ (ج) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

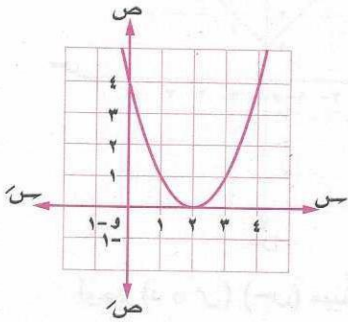
(٧) $\underset{س \leftarrow ٧}{نهـا}$ $\frac{س^٢ - ٤٩}{س - ٧}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) −٤٩ (ج) ٤٩ (د) −١٤

(٨) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (س − ٢)^{٣} + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١)　(ب) (٢ ، −١)　(جـ) (−٢ ، ١)　(د) (−١ ، −٢)

(٩) الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...



حيث د : ح ⟵ ح

(أ) س^{٢} + ٢

(ب) (س + ٢)^{٢}

(جـ) س^{٢} − ٤ س + ٤

(د) − (س − ٢)^{٢}

(١٠) إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ل}{س - ٣}$ = م　فإن : (ل ، م) = ...

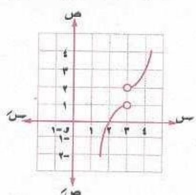
(أ) (٣ ، ٣)　(ب) (−٩ ، ٠)　(جـ) (٩ ، ٦)　(د) (٠ ، ٠)

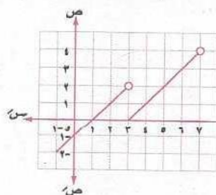
(١١) فى Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

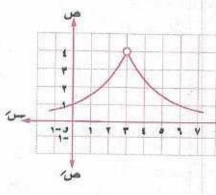
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

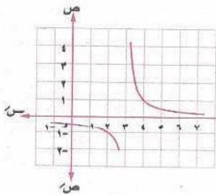
(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١　(ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١　(جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١　(د) ٢ : ٣ : ١

(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)

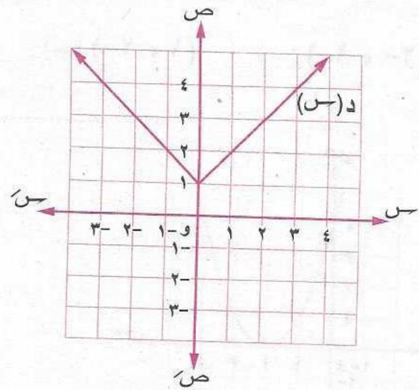

(د)

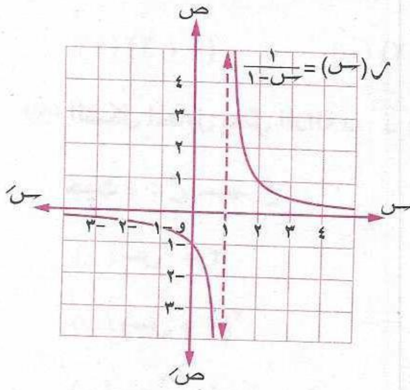
---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. (درجتان)

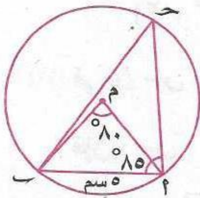
(٢) من الشكلين التاليين : (درجتان)





أوجد (د ∘ ر) (س) مبيناً المجال.

(٣) أوجد : $\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt{س + 11} - 4}{س^2 - 25}$ (درجتان)



(٤) في الشكل المقابل :

م دائرة ، أب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م (درجتان)

إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبار ١

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)

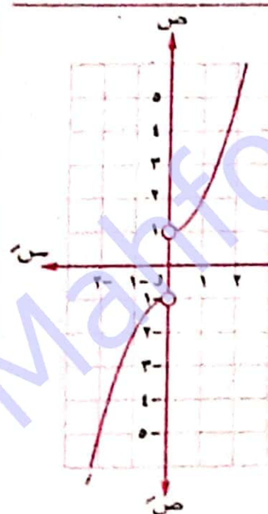
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (جـ) ⑩ (أ) ⑪ (د) ⑫ (جـ)

٢ ① من الرسم :

• مدى الدالة د $= ع - [-١ ، ١]$

• الدالة تزايدية في $ع - \{٠\}$



② ∵ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د\left(\sqrt{س - ٢}\right) = \left(\sqrt{س - ٢}\right)^٢ - ٣$

$= س - ٢ - ٣ = س - ٥$

، ∵ $م_١ =$ مجال ر $= [٢ ، \infty[$

، قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د هي $م_٢ = ع$

∴ مجال $(د \circ ر) = م_١ \cap م_٢ = [٢ ، \infty[$

، $(د \circ ر)(٣) = ٣ - ٥ = -٢$

③ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤س + ٥ - ٩}{(س - ١)\left(\sqrt{٤س + ٥} + ٣\right)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤(س - ١)}{(س - ١)\left(\sqrt{٤س + ٥} + ٣\right)}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

④ ∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

∴ $ق(\angle حـ) = ٥٠°$

في Δ ب ء حـ : ق(∠ب ء حـ)

$= ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°$

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$

∴ ب حـ = ٩ سم ، ء حـ = ٩٫٨ سم

∴ محيط متوازي الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء)

= ٣٨ سم

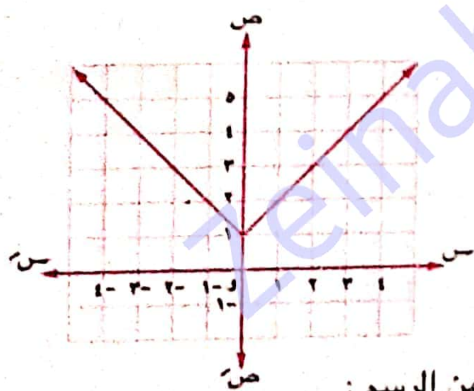
اختبار ٢

١ ① (ب) ② (د) ③ (د) ④ (د)

⑤ (جـ) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (أ)

⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)

٢ ①



من الرسم :

• المدى $= [١ ، \infty[$

• الاطراد : الدالة تناقصية في $]-\infty ، ٠]$ وتزايدية في $[٠ ، \infty[$

• النوع : الدالة زوجية.

② $د(س) = |س| + ١$ ، $ر(س) = \frac{١}{س - ١}$

∴ $(د \circ ر)(س) = د[ر(س)]$

$= د\left(\frac{١}{س - ١}\right)$

$= \left|\frac{١}{س - ١}\right| + ١$

، $م_1$ = مجال ر = ح − {١}

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د

هي $م_2$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

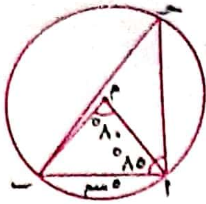
(٣) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+١١}-٤}{س^{٢}-٢٥} \times \frac{\sqrt{س+١١}+٤}{\sqrt{س+١١}+٤}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{س+١١-١٦}{(س-٥)(س+٥)(\sqrt{س+١١}+٤)}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{١}{(س+٥)(\sqrt{س+١١}+٤)}$

$= \frac{١}{(٥+٥)(\sqrt{٥+١١}+٤)} = \frac{١}{٨٠}$

(٤) في Δ ا ب حـ :



ق(∠حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ا م ب)

= ٤٠°

، ق(∠ا ب حـ)

= ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ $\frac{٥}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{ب}{\text{جا } ٥٥°} = \frac{أ}{\text{جا } ٨٥°} = ٢$ نق

$= \frac{\text{محيط } \Delta \text{ ا ب حـ}}{\text{جا } ٤٠° + \text{جا } ٥٥° + \text{جا } ٨٥°}$

∴ محيط Δ ا ب حـ ≈ ١٩,١٢ سم

، نق ≈ ٣,٨٩ سم

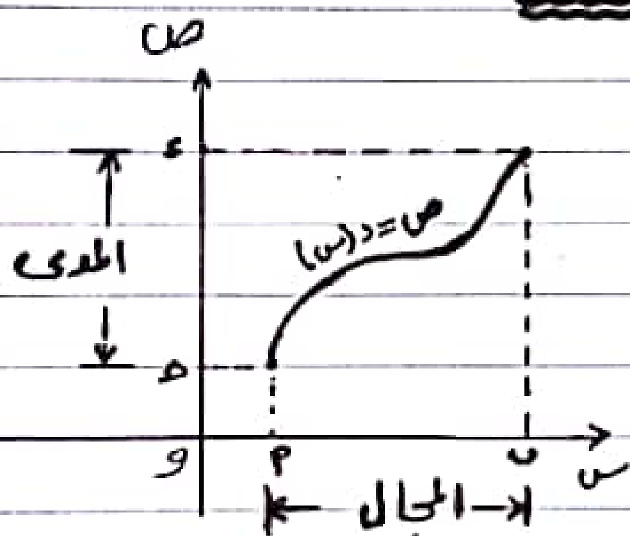
∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≈ ٤٧,٥ سم²

الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها .

* تحديد مجال الدوال الحقيقية ومداها :-



* مجال الدالة :-

(١) هو مجموعة العناصر التي يمكن التعويض بها في قاعدة الدالة والتي تكون عندها الدالة معرفة .

(٢) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور السينات في هذا الشكل نلاحظ أن مجال الدالة د(س) = [أ ، ب]

* مدى الدالة :-

(١) هو مجموعة صور عناصر المجال بواسطة قاعدة الدالة

(٢) هو الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور الصادات مثلاً في هذا الشكل نجد أن مدى الدالة د(س) = [هـ ، ء]

ملاحظة

قبل رسم منحنيات الدوال لا بد من إيجاد مجال هذه الدوال لمعرفة الفترة التي يرسم فيها المنحنى ومعرفة ما إذا كان هناك ثغرات أو قفزات لمنحنى الدالة

(١) الدالة كثيرة الحدود :-

مجال الدالة كثيرة الحدود يساوي ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

(٢) الدالة الكسرية :-

إذا كانت د دالة كسرية حيث $د(س) = \frac{هـ(س)}{ى(س)}$

حيث هـ ، ى دوال كثيرات حدود فإن

مجال الدالة د = ح - مجموعة أصفار المقام

مثلا :-

إذا كانت $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$

$\therefore د(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س - ٢)}$

$\therefore$ مجال الدالة = ح - {٣ ، ٢}

$د(س) = \frac{١}{س - ٢}$

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$

هنا أصفار المقام = ϕ

$\therefore$ مجال الدالة = ح

(٣) إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث

ن ∈ ص$^+$ ، ن > ١ ، هـ(س) كثيرة حدود فإن :-

(١) إذا كانت ن عدد فردي فإن مجال الدالة = ح

(٢) إذا كانت ن عدد زوجي فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ(س) ≥ صفر

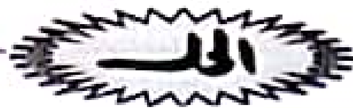
مثال

عين مجال الدوال الآتية :-

(١) $د(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

(٢) $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

(٣) د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ (٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$



(١) ∵ د(س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ دليل الجذر عدد فردي

∴ المجال = ح

(٢) ∵ د(س) = $\sqrt{س+٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

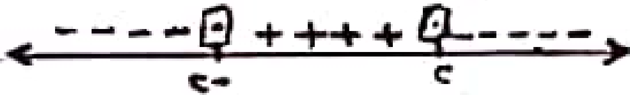
∴ مجال الدالة هو قيم س التي تجعل س+٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢ منها مجال الدالة = [-٢ ، ∞[

(٣) ∵ د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ دليل الجذر عدد زوجي

وتحت الجذر دالة تربيعية ⟵ نبحث اشارة المقدار تحت الجذر

وذلك بوضع ٤-س^٢ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = [-٢ ، ٢]

(٤) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ دليل الجذر عدد زوجي

∴ نبحث المقدار اشارة المقدار الذي تحت الجذر

بوضع س^٢-٤ = ٠ ∴ س = ± ٢



∴ مجال الدالة = ح -]-٢ ، ٢[

* تدريب : أوجد مجال الدوال الآتية

(١) د(س) = $\sqrt{س^٣ + ١}$ (٢) د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$

(٤) اذا كانت د(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{و(س)}}$ وكانت هـ(س) أو و(س) أو كلاهما دوال جذرية

فان مجال الدالة د = {م١ ∩ م٢} − {أصفار دالة المقام}

حيث م١ مجال هـ(س) ، م٢ مجال و(س)

مثال

عين مجال الدوال الاتية

(١) د(س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{١ − س}}}$ (٢) د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س − ٣}}}{\text{س}^{٢}\text{ − ٤}}$

(٣) د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س − ٣}}}{\sqrt{\text{س − ٥}}}$ (٤) د(س) = $\sqrt{\frac{\text{س − ٣}}{\text{س − ٥}}}$

الحل

(١) ∵ د(س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{١ − س}}}$ ⟸ ∴ م١ = ح

م٢ =]−∞ ، ١]

اصفار دالة المقام عند ١ − س = ٠ ∴ اصفار المقام = {١}

∵ مجال الدالة د = (م١ ∩ م٢) − {اصفار المقام}

∴ المجال =]−∞ ، ١] − {١} ⟸ ∴ مجال الدالة =]−∞ ، ١[

(٢) ∵ د(س) = $\frac{\sqrt{\text{س − ٣}}}{\text{(س − ٢)(س + ٢)}}$ ∴ م١ = [٣ ، ∞[

∴ م٢ = ح

اصفار دالة المقام = {−٢ ، ٢} ، م١ ∩ م٢ = [٣ ، ∞[

∴ مجال الدالة د = [٣ ، ∞[− {−٢ ، ٢} = [٣ ، ∞[

(٣) ∵ م١ = [٣ ، ∞[، م٢ = [٥ ، ∞[

∴ م١ ∩ م٢ = [٥ ، ∞[، أصفار المقام = {٥}

∴ مجال الدالة د =]٥ ، ∞[

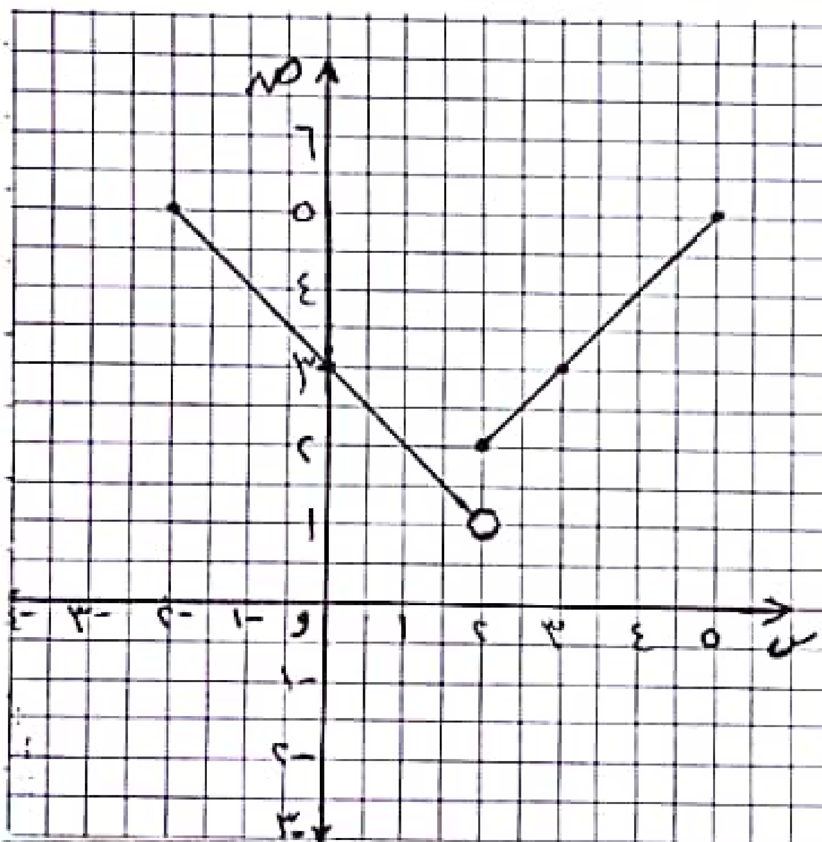
(٤) يترك للطالب

مثال ارسم الشكل البياني للدوال الآتية :

(١) د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

(٢) د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٣ \leqslant س < ٠ \\ س + ٢ & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٣ \end{cases}$





(١) مجال الدالة = [-٢ ، ٥]

(٢) تعيين المجال ورسم المنحنى يترك للطالب

العمليات على الدوال

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإن

(1) $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$

ومجالها هو $م_1 \cap م_2$

(2) $(د_1 \times د_2)(س) = د_1(س) \times د_2(س)$ ومجالها هو $م_1 \cap م_2$

(3) $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq 0$

مجالها هو $(م_1 \cap م_2) - \{$أصفار دالة المقام $د_2\}$

$= م_1 - \{$أصفار بسط ومقام $د_2\}$

مثال

إذا كانت $د(س) = \frac{س}{س+1}$ ، $ر(س) = \frac{س+1}{س-2}$ أوجد

(1) $(د+ر)(س)$ موضحاً مجالها ثم اوجد قيمة $(د+ر)(3)$

(2) $(د \cdot ر)(س)$ " " " " قيمة $(د \cdot ر)(3)$

(3) $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ موضحاً مجالها ثم أوجد $\left(\frac{د}{ر}\right)(-1)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(1)$

الحل

$\because م_1 = ح - \{-1\}$ ، $م_2 = ح - \{2\}$

(1) $\therefore (د+ر)(س) = \frac{س}{س+1} + \frac{س+1}{س-2} = \frac{س(س-2) + (س+1)^2}{(س+1)(س-2)}$

$\therefore (د+ر)(س) = \frac{س^2 - 2س + س^2 + 2س + 1}{(س+1)(س-2)} = \frac{2س^2 + 1}{(س+1)(س-2)}$

∴ مجال (د + ر)(س) = م١ ∩ م٢ = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ (د + ر)(٣) = (٢ × ٩ + ١) / (٤ × ١) = ١٩ / ٤

(٢) ∵ (د · ر)(س) = س / (س + ١) × (س + ١) / (س - ٢) = س / (س - ٢)

ومجالها = م١ ∩ م٢ = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ (د · ر)(٣) = ٣ / ١ = ٣

(٣) ∵ (د/ر)(س) = س / (س + ١) × (س - ٢) / (س + ١) = س(س - ٢) / (س + ١)²

ومجالها = (م١ ∩ م٢) - {-٣ ، -١} = ح - {-٣ ، -١ ، ٢}

∴ (د/ر)(-١) = غير معرف لان -١ ∉ مجال (د/ر)(س)

∴ (د/ر)(١) = (١ × -١) / (٢)² = -١ / ٤

تركيب الدوال

اذا كانت (د) دالة فى س و (ر) دالة فى س أيضاً وكان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى ∅ فانه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين وهى
ع = ر ∘ د وتكون ع(س) = (ر ∘ د)(س)
وتقرأ ر تركيب د أو ر بعد د حيث
(ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

مثال اذا كانت $د(س) = س^٢$ ، $ر(س) = س + ١$

اوجد (١) $(د ∘ ر)(١)$ (٢) $(د ∘ د)(-١)$ (٣) $(ر ∘ د)(١)$

الحل

(١) ∵ $د(س) = س^٢$ ، $ر(س) = س + ١$

∴ $(د ∘ ر)(س) = د(ر(س)) = (س+١)^٢ = س^٢ + ٢س + ١$

∴ $(د ∘ ر)(١) = (١+١)^٢ = ٤$

(٢) ∵ $(د ∘ د)(س) = د(د(س)) = (س^٢)^٢ = س^٤$

∴ $(د ∘ د)(-١) = (-١)^٤ = ١$

(٣) ∵ $(ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = س^٢ + ١$

∴ $(ر ∘ د)(١) = ١ + ١ = ٢$

مجال دالة التركيب

* لتعيين مجال الدالة $(د ∘ ر)$ نتبع الآتي

(١) نوجد مجال الدالة الثانية ر وليكن $م_١$

(٢) نوجد مجال الدالة الاولى د وليكن م

(٣) نوجد قيم س التي تجعل الدالة الثانية ر(س) في مجال الدالة الاولى د وليكن $م_٢$

* ولتعيين هذه القيم نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د ومن خلال هذه العلاقة نوجد $م_٢$

(٤) مجال دالة التركيب $(د ∘ ر) = م_١ \cap م_٢$

مثال اذا كانت $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $ر(س) = س + ٣$

اوجد $(د ∘ ر)(س)$ ، $(ر ∘ د)(س)$ وحدد مجال كل منها

الحل

∵ $ر(س) = س + ٣$ ∴ $م_١ = ح$ ← (١)

∵ $د(س) = \frac{1}{س}$ ∴ مجال الدالة د = ح − {٠، ٤}

∴ $(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \frac{1}{س+٣}$ ⟵ ②

* لايجاد م٢ (قيم س التي تجعل ر(س) في مجال الدالة د)
نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ س + ٣ ∈ ح − {٠، ٤} ⟸ منها س + ٣ ≠ ٠

∴ س ≠ −٣ ⟸ ∴ م٢ = ح − {−٣} ⟵ ③

∵ مجال دالة التركيب (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

∴ المجال = ح ∩ (ح − {−٣}) ∴ المجال = ح − {−٣}

(٢) ∵ $د(س) = \frac{1}{س}$ ∴ م١ = ح − {٠، ٤} ⟵ ①

∵ ر(س) = س + ٣ ∴ مجال الدالة ر = ح

∴ $(ر \circ د)(س) = ر(د(س)) = \frac{1}{س} + ٣$ ⟵ ②

* لايجاد م٢ نضع د(س) ∈ مجال الدالة ر

∴ $\frac{1}{س}$ ∈ ح ⟸ ∴ منها س ≠ ٠

∴ م٢ = ح − {٠، ٤} ⟵ ③

∴ مجال دالة التركيب (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢

∴ المجال = (ح − {٠، ٤}) ∩ (ح − {٠، ٤}) = ح − {٠، ٤}

مثال

اذا كانت د(س) = س² − ٣ ، $ر(س) = \sqrt{س-٢}$
اوجد (د ∘ ر) محدداً مجالها ثم أوجد (د ∘ ر)(٢)

الحل

∵ $ر(س) = \sqrt{س-٢}$ ∴ م١ = [٢، ∞[⟵ ①

∵ د(س) = س² - ٣ ∴ مجال الدالة د = ح

∴ (د ∘ ر)(س) = د (ر(س)) = $(\sqrt{س - ٢})^2$ - ٣

∴ (د ∘ ر)(س) = س - ٥ ⟵ ②

* لايجاد م٢ نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{س - ٢}$ ∈ ح منها س ≥ ٢ ∴ م٢ = [٢ ، ∞[③

∴ مجال دالة التركيب (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

∴ المجال = [٢ ، ∞[∩ [٢ ، ∞[∴ المجال = [٢ ، ∞[

∴ (د ∘ ر)(٢) = ٢ - ٥ = -٣

مثال اذا كانت د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر(س) = $\sqrt{٤ - س}$

اوجد د ∘ ر موضحاً مجالها

الحل

∵ ر(س) = $\sqrt{٤ - س}$ ∴ م١ =]-∞ ، ٤] ⟵ ①

∵ د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ∴ مجال الدالة د = [٢ ، ∞[

∴ (د ∘ ر)(س) = د (ر(س)) = $\sqrt{\sqrt{٤ - س} - ٢}$ ⟵ ②

* لايجاد م٢ نضع ر(س) ∈ مجال الدالة د

∴ $\sqrt{٤ - س}$ ∈ [٢ ، ∞[∴ $\sqrt{٤ - س}$ ≥ ٢

∴ ٤ - س ≥ ٤

منها - س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٠ ⟸ ∴ م٢ =]-∞ ، ٠] ⟵ ③

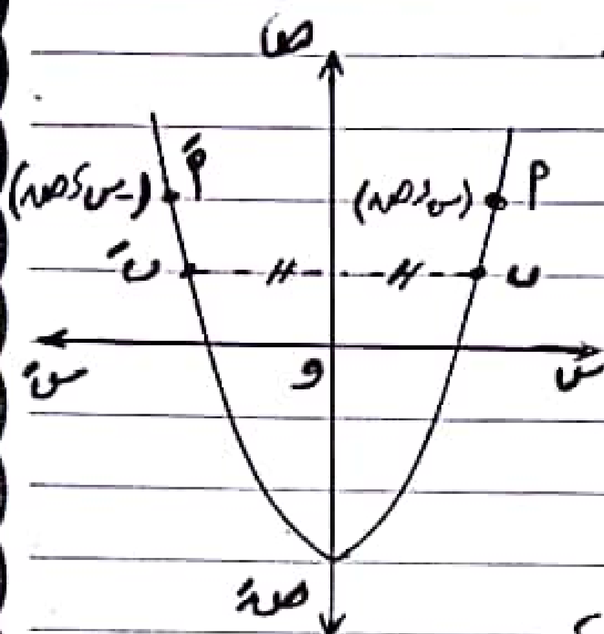
∴ مجال دالة التركيب (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

∴ المجال =]-∞ ، ٤] ∩]-∞ ، ٠]

∴ المجال =]-∞ ، ٠]

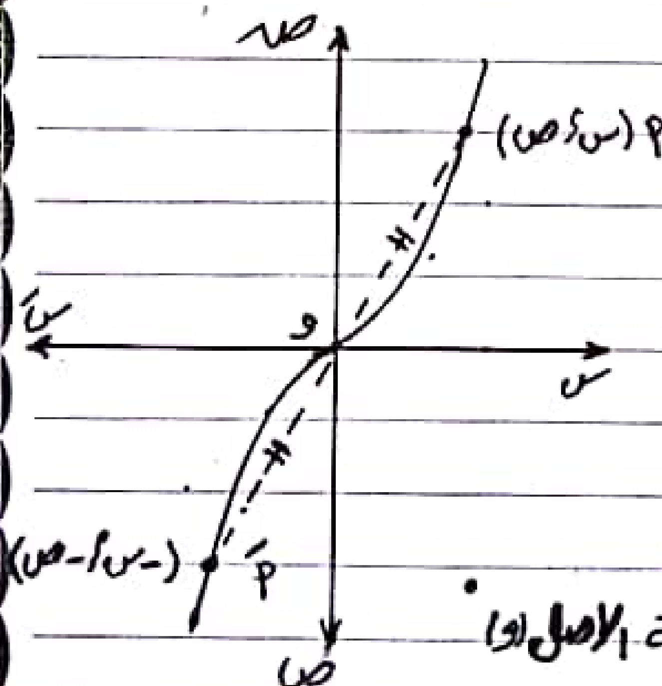
بعض خواص الدوال

* التماثل حول محور الصادات :-



يكون الشكل البيانى لمنحنى دالة متماثلا حول محور الصادات اذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ َ (-س ، ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ َ هى صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات

* التماثل حول نقطة الاصل :-



يكون الشكل البيانى لمنحنى دالة متماثلا حول نقطة الاصل اذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) ∈ المنحنى توجد نقطة أخرى أ َ (-س ، -ص) ∈ المنحنى بحيث تكون أ َ هى صورة أ بالانعكاس فى نقطة الاصل (و)

الدالة الزوجية

يقال أن الدالة د زوجية اذا كان لكل س ، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول محور الصادات

الدالة الفردية

يقال أن الدالة د فردية إذا كان لكل س ، -س ∈ مجال الدالة د يكون د(-س) = -د(س) ويكون منحنى الدالة متماثلاً حول نقطة الأصل

ملاحظات هامة

(١) إذا كانت د(-س) ≠ د(س) ، د(-س) ≠ -د(س) فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية

(٢) إذا كانت س ، -س ∉ مجال الدالة فإن الدالة د تكون ليست فردية وليست زوجية

مثال

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = ٣س^٢ (٢) د(س) = س^٢ ، س ∈ [٠ ، ٦]

(٣) د(س) = ٢س^٣ (٤) د(س) = √(س - ١)

(٥) د(س) = جتا س (٦) د(س) = جا س

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س^٢ ∴ مجال الدالة = ح

∴ بفرض أن س ، -س ∈ مجال الدالة فإنه

د(-س) = ٣(-س)^٢ = ٣س^٢ = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) د(س) = س^٢ ، س ∈ [٠ ، ٦] ∴ مجال الدالة = [٠ ، ٦]

∴ لكل س ∈ مجال الدالة فإنه -س ∉ مجال الدالة

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٣) ∵ د(س) = ٢س^٣ ∴ مجال الدالة = ح

∴ د(-س) = ٢ × (-س)^٣ = -٢س^٣ = -د(س) ← الدالة فردية

(٤) ∵ $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ∴ مجال الدالة $[١ ، \infty[$

∴ لكل $س \in [١ ، \infty[$ لا يوجد بالضرورة $-س \in [١ ، \infty[$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٥) ∵ $د(س) = جتا س$ ∴ مجال الدالة $= ح$

وبفرض أن $-س ، س \in ح$ فإن

$د(-س) = جتا(-س) = جتا س = د(س)$ ← الدالة زوجية

(٦) ∵ $د(س) = جا س$ ∴ مجالها $= ح$

وبفرض أن $س ، -س \in ح$ فإن

$د(-س) = جا(-س) = -جا س = -د(س)$ ← الدالة فردية

مثال ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٦}$ (٢) $د(س) = \sqrt[٣]{س^٣ + س}$

(٣) $د(س) = س^٣ - \frac{١}{س}$ (٤) $د(س) = س جتا س$

الحل

(١) ∵ $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٦}$ ∴ مجال الدالة $= ح$

وبفرض أن $-س ، س \in$ مجال الدالة فإن

$د(-س) = \sqrt{(-س)^٢ + ٦} = \sqrt{س^٢ + ٦} = د(س)$ ← الدالة زوجية

(٢) ∵ $د(س) = \sqrt[٣]{س^٣ + س}$ ∴ مجال الدالة $= ح$

وبفرض أن $-س ، س \in ح$ فإن

$د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^٣ + (-س)} = \sqrt[٣]{-س^٣ - س} = -\sqrt[٣]{س^٣ + س}$

$= -د(س)$ ← الدالة فردية

(٣) ∵ $د(س) = س^٣ - \frac{١}{س}$ مجالها = ح - {٠}

∴ بفرض أن لكل س ∈ مجال الدالة يوجد -س ∈ مجال الدالة

∴ $د(-س) = (-س)^٣ - \frac{١}{-س} = -س^٣ + \frac{١}{س}$

$= -[س^٣ - \frac{١}{س}] = -د(س)$ ← الدالة فردية

(٤) ∵ د(س) = س جتا س ← مجال الدالة = ح

∴ د(-س) = -س جتا(-س) = -س جتا س

= -(س جتا س) = -د(س) ← الدالة فردية

مثال

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية

(١) د(س) = { ٢س ، س ≥ ٠ ؛ -٢س ، س < ٠ }

(٢) د(س) = { $٢س + س^٢$ ، س ≥ ٠ ؛ $٢س - س^٢$ ، س < ٠ }

الحل

١) مجال الدالة = ح وبفرض أن -س ، س ∈ مجال الدالة

∴ د(-س) = { ٢(-س) ، -س ≥ ٠ ؛ -٢(-س) ، -س < ٠ }

∴ د(-س) = { -٢س ، س ≤ ٠ ؛ ٢س ، س > ٠ }

∴ د(-س) = { ٢س ، س ≥ ٠ ؛ -٢س ، س < ٠ } = د(س) ← الدالة زوجية

(٢) د(-س) = { $٢(-س) + (-س)^٢$ ، -س ≥ ٠ ؛ $٢(-س) - (-س)^٢$ ، -س < ٠ } = { $-٢س + س^٢$ ، س ≤ ٠ ؛ $-٢س - س^٢$ ، س > ٠ }

∴ د(-س) = { $-(٢س + س^٢)$ ، س ≥ ٠ ؛ $-(٢س - س^٢)$ ، س < ٠ } = -د(س) ← الدالة فردية

ملاحظات هامة

(١) اذا كانت د(س) زوجية في فترة ما [أ ، ب] فان
أ = − ب ، أ + ب = صفر

(٢) الدالة الزوجية متماثلة حول محور الصادات (المستقيم س = ٠)

(٣) اذا كانت الدالة د زوجية فانه د(−أ) = د(أ)
وبالتالي يكون د(أ) + د(−أ) = ٢ د(أ) = ٢ د(−أ)

(٤) اذا كانت د دالة فردية فانه د(−أ) = −د(أ)
وبالتالي د(أ) + د(−أ) = صفر

(٥) اذا كانت الدالة د زوجية على الفترة [أ ، ب]
فان د(أ + م) = د(ب − م)

مثال

أكمل ما يأتي

(١) اذا كانت د دالة زوجية فان د(٢) + د(−٢) = ...

(٢) اذا كانت د دالة فردية فانه د(٢) + د(−٢) = ...

(٣) اذا كانت د دالة زوجية في الفترة [أ ، ب] فانه ب = ...

(٤) اذا كانت د دالة فردية ، د(١) = ٢ فالنقطة (−١ ، .....) تنتمي الى منحنى الدالة

(٥) اذا كانت د دالة زوجية وكان د(١) = ٢ فانه النقطة (−١ ، .....) تنتمي الى منحنى الدالة

الحل

(١) ٢ د(٢) = ٢ د(−٢) (٢) صفر

(٣) ب = −أ

(٤) ∵ د فردية ∴ د(−١) = −د(١) = −٢ ∴ النقطة (−١ ، −٢)

(٥) ∵ د زوجية ∴ د(−١) = د(١) = ٢ ∴ النقطة (−١ ، ٢)

الدوال الأحادية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة احادية اذا كان لكل أ ، ب ∈ المجال س بحيث د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

اى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الاحادية لهما نفس الصورة

اى عندما نرسم اى خط افقى لابد أن يقطع منحنى الدالة الاحادية فى نقطة واحدة فقط

مثال أثبت أن الدوال الاتيه دوال أحادية :

(١) د(س) = ٢س − ٥   (٢) $\text{د(س)} = \frac{\text{٢س} - ٣}{\text{٣س} + ٢}$

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢س − ٥   ونفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة

فإن د(أ) = د(ب)   ∴ ٢أ − ٥ = ٢ب − ٥

منها أ = ب ⟸ الدالة أحادية

(٢) ∵ $\text{د(س)} = \frac{\text{٢س} - ٣}{\text{٣س} + ٢}$ ونفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة

بحيث د(أ) = د(ب) ⟸ ∴ $\frac{\text{٢أ} - ٣}{\text{٣أ} + ٢} = \frac{\text{٢ب} - ٣}{\text{٣ب} + ٢}$

∴ ٦أب + ٤أ − ٩ب − ٦ = ٦أب − ٩أ + ٤ب − ٦

∴ ٤أ − ٩ب = −٩أ + ٤ب ⟸ ١٣أ = ١٣ب ⟸ أ = ب

∴ الدالة أحادية

ملاحظات هامة

(١) كل الدوال الزوجية ليست أحادية

(٢) اذا وجد عنصران في مجال الدالة لهما نفس الصورة كانت الدالة ليست أحادية مثلاً اذا كان (أ ، ص) ، (ب ، ص) تقعان على منحنى الدالة د فإن الدالة د ليست احادية لانه العنصران أ ، ب لهما نفس الصورة

مثال

ابحث نوع الدوال الاتية من حيث كونها أحادية أم لا

(١) د(س) = ٢س^٢ − ١ (٢) د(س) = س^٢ + س

الحل

(١) ∵ د(س) = ٢س^٢ − ١ ونفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة بحيث د(أ) = د(ب) ∴ ٢أ^٢ − ١ = ٢ب^٢ − ١

∴ أ^٢ = ب^٢ منها أ = ±ب ⟸ ∴ الدالة ليست أحادية

(٢) ∵ د(س) = س^٢ + س ونفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة بحيث د(أ) = د(ب) ∴ أ^٢ + أ = ب^٢ + ب

∴ أ^٢ − ب^٢ = ب − أ ∴ (أ − ب)(أ + ب) − (ب − أ) = ٠

∴ (أ − ب) [أ + ب + ١] = منها أ = ب

أ = −ب − ١

∴ الدالة ليست أحادية

مثال

بين نوع الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو أحادية أو غير ذلك

(١) د(س) = س + ٢

(٢) د : ح^+ ⟵ ح حيث د(س) = س^٢

(٣) د : ح^+ ⟵ ح^+ حيث د(س) = ٣س^٢

(٤) د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح حيث د(س) = س^٢

الحل

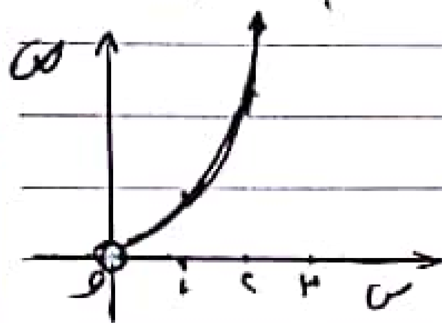
(١) ∵ $د(س) = س + ٢$ مجالها = ح وهي دالة كثيرة

∴ $د(-س) = -س + ٢ = -[س - ٢] \neq -د(س)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها احادية

(٢) ∵ $د: ص^+ \longrightarrow ص$ حيث $د(س) = س^٢$

الدالة مجالها $ص^+$ ⟵ ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



ومن الرسم البياني نجد أن الدالة احادية

(٣) يترك للطالب

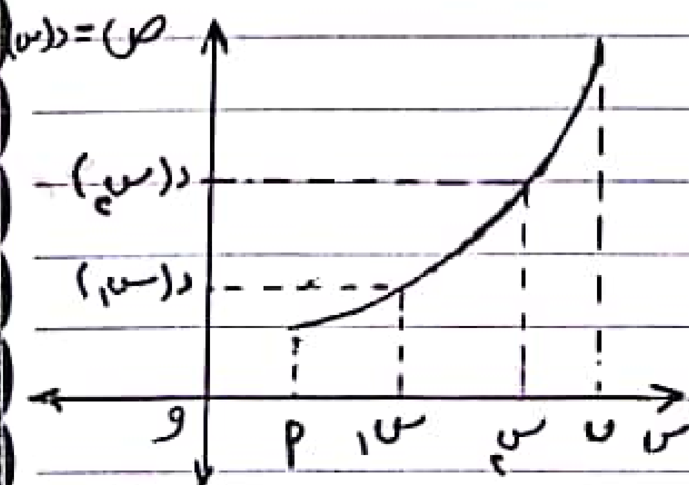
(٤) يترك للطالب

اطراد الدوال

يقصد ببحث اطراد دالة ما هو تحديد الفترات من مجالها التي تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التي تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التي تكون فيها الدالة ثابتة

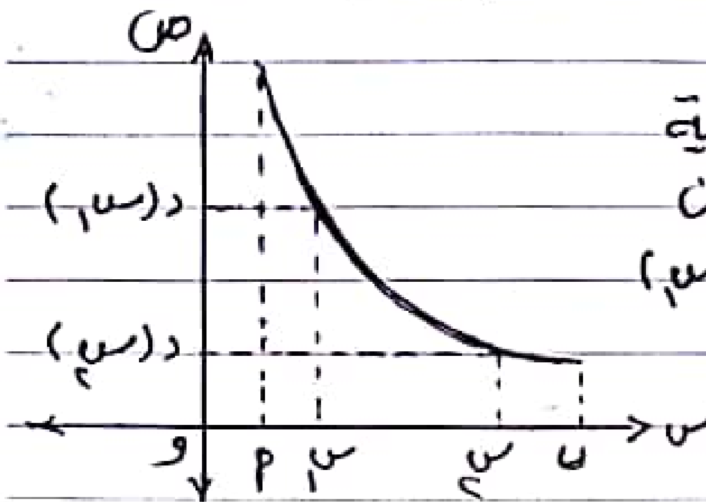
(١) تزايد الدالة :-

يقال أن الدالة د تزايديه في الفترة $]أ ، ب[$ اذا كان لكل $س_٢ > س_١ \Longleftarrow د(س_٢) > د(س_١)$



لكل $س_١ ، س_٢ \in]أ ، ب[$

(٢) تناقص الدالة :-



يقال أن الدالة د تناقصية في الفترة]أ ، ب[اذا كان لكل س٢ > س١ ⟸ د(س٢) < د(س١)

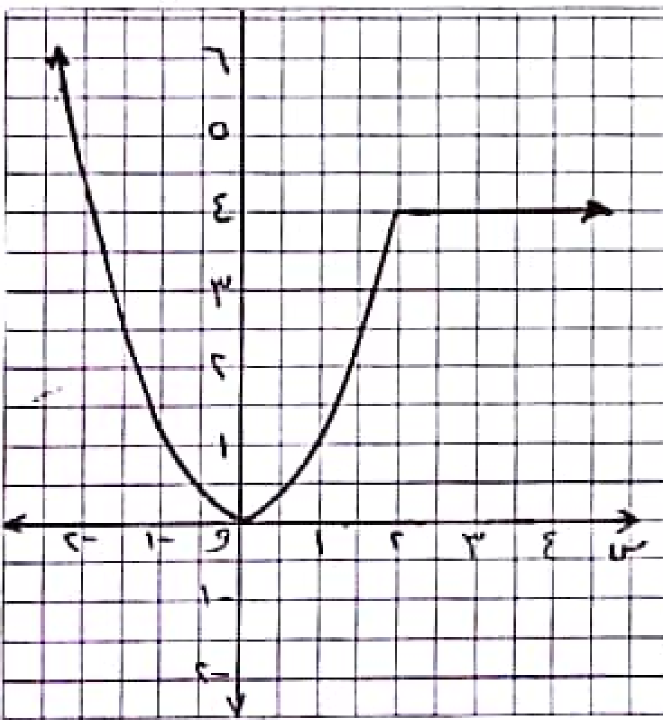
لكل س١، س٢ ∈]أ ، ب[

(٣) ثبوت الدالة :- يقال أن الدالة د ثابته في الفترة]أ، ب[اذا كان س٢ > س١ ⟸ د(س٢) = د(س١)

اى أن منحنى الدالة يوازى محور السينات فى هذه الفترة

مثال

في الشكل المقابل ابحث اطراد الدالة :-



الحل

∵ مجال الدالة = ح

الدالة تناقصية على الفترة]-∞ ، ٠[وتزايدية في الفترة]٠ ، ٢[وثابتة في الفترة]٢ ، ∞[

* ملاحظة هامة :-

اذا كانت الدالة فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر على مجالها يقال أن الدالة احادية

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

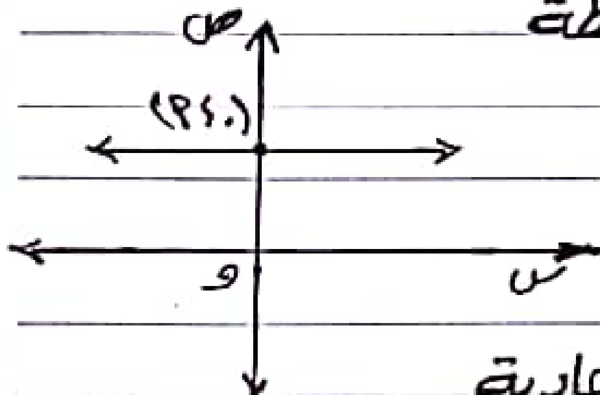
(١) الدالة الثابتة :.

الصورة الأساسية د : ح ← ح ، د(س) = م حيث م ∈ ح

يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازي محور السينات

ويقطع محور الصادات في النقطة

(٠، م)



مجال الدالة = ح

مدى الدالة = {م}

الدالة زوجية

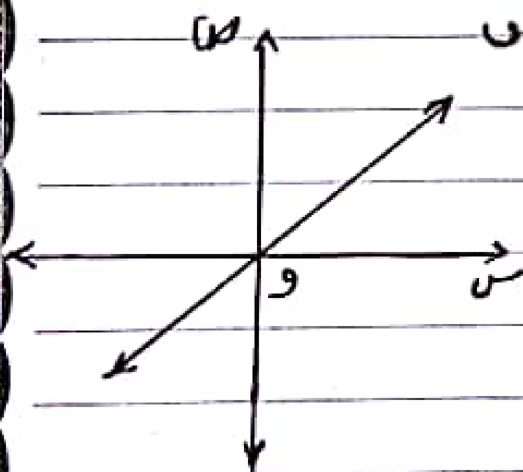
الدالة ثابتة والدالة ليست أحادية

(٢) الدالة الخطية :.

الصورة الأساسية د(س) = س

يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر

بنقطة الأصل وميله = ١



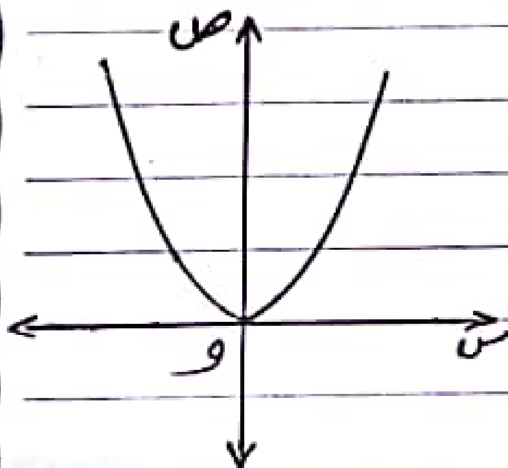
مجال الدالة = ح

مدى الدالة = ح

الدالة فردية - الدالة تزايدية

على مجالها - الدالة أحادية

(٣) الدالة التربيعية :-



الصورة الأساسية د(س) = $س^٢$

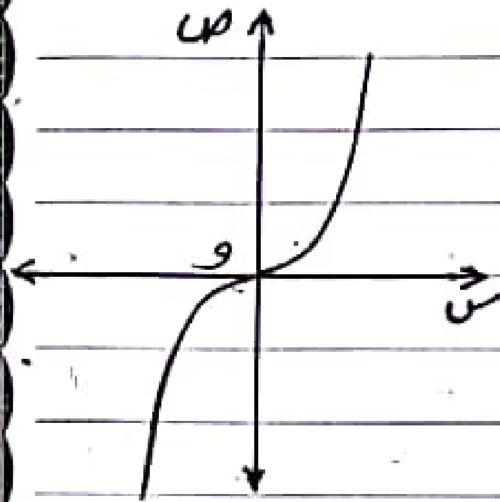
مجالها = ح ومداها = [٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة تزايدية

على]٠، ∞[وتناقصية على]-∞، ٠[

الدالة ليست أحادية

(٤) الدالة التكعيبية :-



الصورة الأساسية د(س) = $س^3$

مجالها = ح ومداها = ح

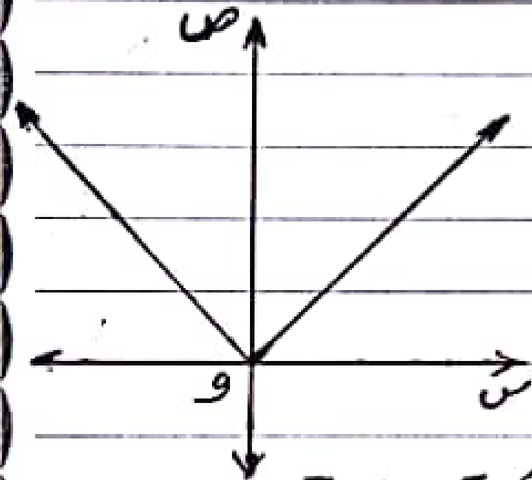
الدالة فردية - الدالة تزايدية

في]-∞،٠[وتزايدية على]٠،∞[

الدالة تزايديه على مجالها

الدالة احادية

(٥) دالة المقياس :-



الصورة الأساسية د(س) = |س|

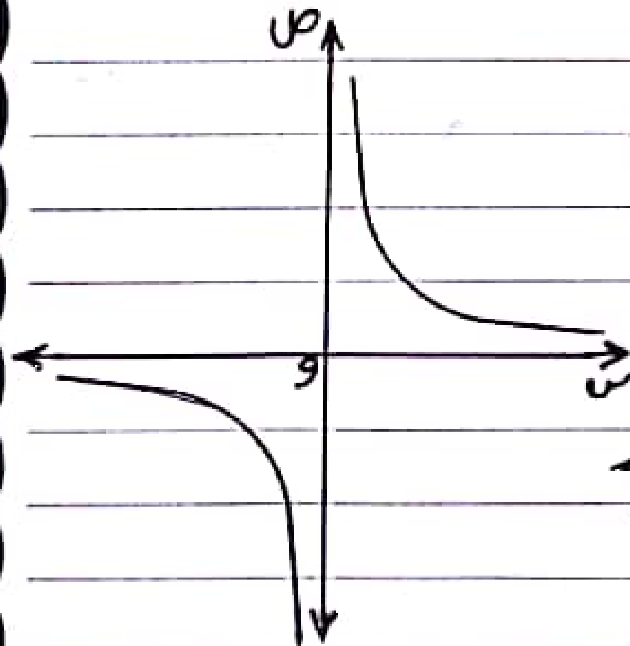
∴ د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠ }

مجال الدالة = ح ومداها = [٠،∞[

الدالة زوجية - الدالة تناقصية في]-∞،٠[

وتزايدية في]٠،∞[- الدالة ليست احادية

(٦) الدالة الكسرية :-



الصورة الأساسية د(س) = $\frac{1}{س}$

مجالها = ح - {٠}

مداها = ح - {٠}

الدالة فردية

الدالة تناقصية في]-∞،٠[

وتناقصية في]٠،∞[ايضاً

الدالة احادية

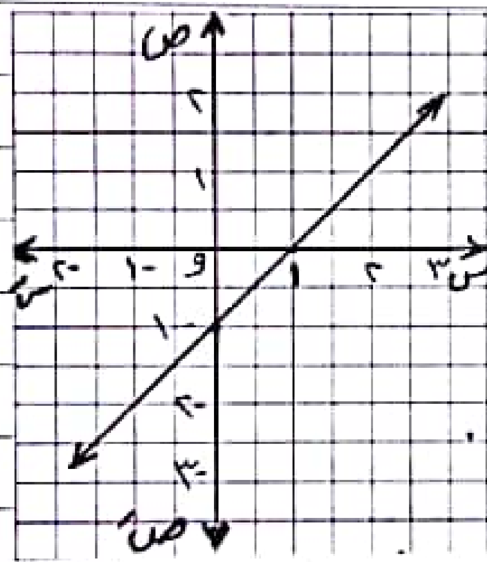
التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

(١) الدالة الخطية :-

الصورة العامة د(س) = أ س + ب

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = س لرسم منحنى الدالة ر(س) = س - ١ ثم ادرس هذه الدالة

الحل



منحنى الدالة ر(س) = س - ١
هو نفس منحنى الدالة د(س) = س
بإزاحة رأسية مقدارها
وحدة واحدة في اتجاه وص←
مجال الدالة = ح ومداها = ح
الدالة تزايدية على مجالها
الدالة ليست زوجية وليست فردية
الدالة احادية

(٢) الدالة التربيعية :-

الصورة العامة هي د(س) = أ(س + ب)^2 + حـ

(١) اذا كانت أ > ١ فإن منحنى الدالة د(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

(٢) اذا كانت ٠ < أ < ١ فإن منحنى الدالة د(س) هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة ر(س) = س^2

(٣) اذا كانت أ < ٠ فإن منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة ر(س) = س^2 في محور السينات

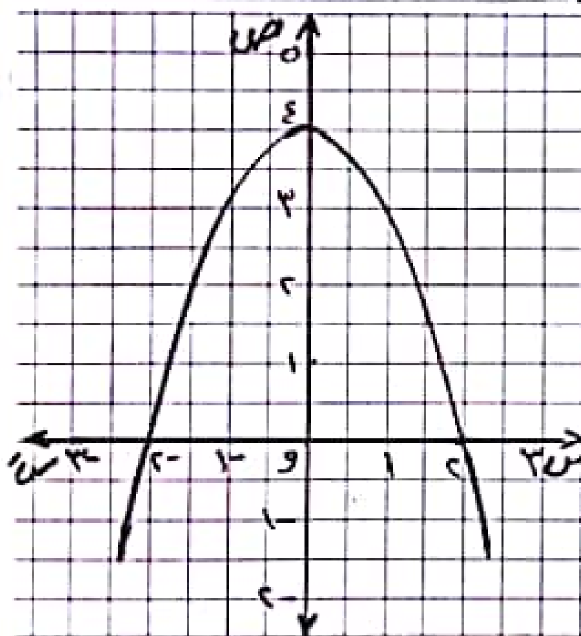
(٤) نقطة رأس المنحنى = (-ب ، حـ) حيث الاحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى يمثل الازاحة الافقية لمنحنى الدالة بينما الاحداثي الصادي يمثل الازاحة الرأسية

* يكون ترتيب التحويلات الهندسية كالتالي تمدد - انعكاس - ازاحة افقية - ازاحة رأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س² في رسم منحنى الدالة ر(س) = - س² + ٤ ثم ادرس الدالة

الحل



∵ ر(س) = -(س - ٠)² + ٤

∴ أ = -١ ، ب = ٠ ، حـ = ٤

∴ نقطة رأس المنحنى = (٠ ، ٤)

∴ منحنى الدالة ر(س) = -س² + ٤ هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س² يتبعه ازاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات في اتجاه وص

مجال الدالة = ح

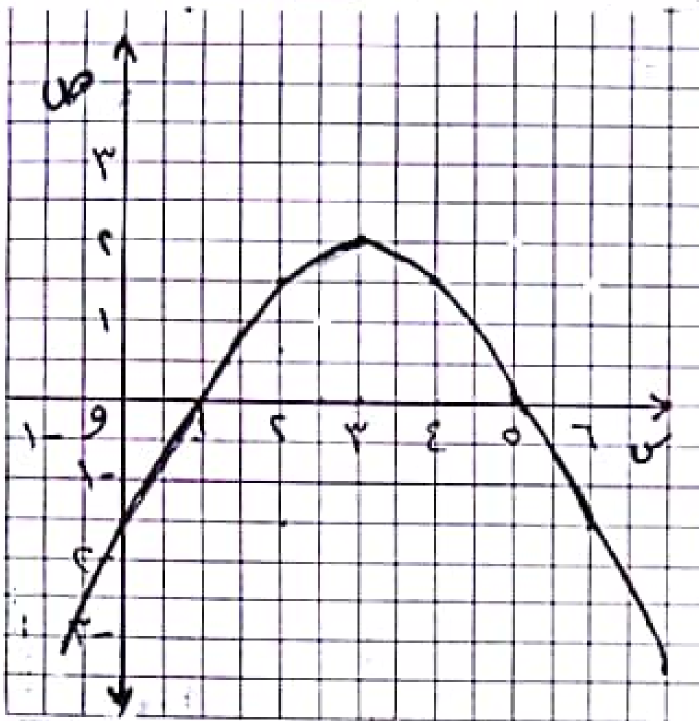
مدى الدالة =]-∞ ، ٤]

الدالة زوجية وليست احادية والدالة تزايدية في الفترة]-∞ ، ٠[وتناقصية في الفترة]٠ ، ∞[

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س² في رسم منحنى الدالة ر(س) = ٢ - $\frac{1}{2}$(س - ٣)² ثم ادرس هذه الدالة

الحل



∵ د(س) = ٢ - ½ (س - ٣)²

∴ أ = -½ ، ب = -٣ ، ك = ٢

∴ نقطة رأس المنحنى = (٣ ، ٢)

∴ منحنى الدالة د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س) = س² يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ازاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه وس→ ثم ازاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وص↑

مجال الدالة = ح ومداها =]-∞ ، ٢] - الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست احادية - الدالة تزايدية في]-∞ ، ٣[وتناقصية في الفترة]٣ ، ∞[

مثال

بدون رسم منحنى الدالة د(س) اذكر التحويلات الهندسية التي طرأت عليها اذا كان

(١) د(س) = س² + ٤س + ١ (٢) د(س) = (٢س - ٣)² - ١

الحل

(١) ∵ د(س) = س² + ٤س + ١ ∴ أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ١

∴ س = -ب/٢أ = -٤/٢ = -٢ ، ص = (-٢)² + ٤ × -٢ + ١ = -٣

∴ نقطة رأس المنحنى = (-٢ ، -٣)

∴ منحنى الدالة د(س) هو نفس منحنى الدالة د(س) = س² بازاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه وس← ثم ازاحة رأسية قدرها ٣ في اتجاه وص↓

مجال الدالة = ح ومداها = [-٣ ، ∞[الدالة ليست زوجية وليست فردية

(٢) يترك للطالب

(٣) الدالة التكعيبية :-

الصورة العامة ر(س) = أ (س + ب)^{٣} + جـ

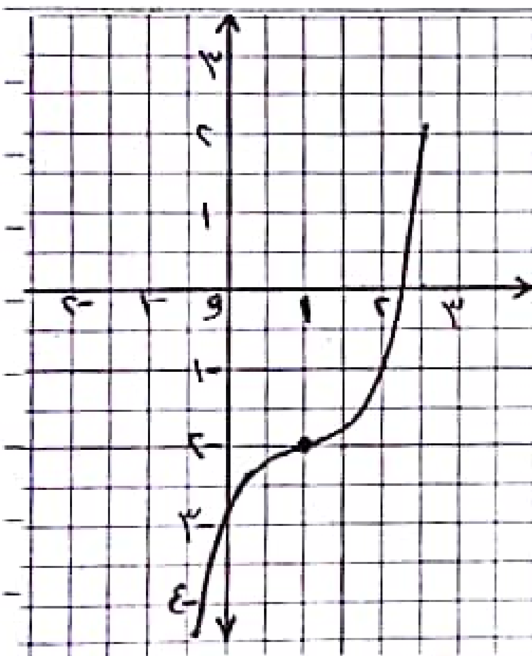
نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، جـ)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحصل على الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} في رسم منحنى الدالة ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢ ثم ادرس الدالة

الحل



∵ ر(س) = (س - ١)^{٣} - ٢

∴ أ = ١ ب = -١ جـ = -٢

∴ نقطة تماثل المنحنى = (١ ، -٢)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو نفس منحنى الدالة د(س) = س^{٣} بإزاحة أفقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه و س$\leftarrow$ يتبعها إزاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص$\leftarrow$

مجال الدالة = ح ومداها = ح

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة أحادية

الدالة تزايدية على مجالها

* تدريب :-

استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} في رسم منحنى الدالة ر(س) = -٢(س - ٢)^{٣} + ١ ثم ادرس هذه الدالة

(٤) الدالة الكسرية :-

الصورة العامة للدالة الكسرية $د(س) = \frac{أ}{س + ب} + ح$

مجالها = ح - {-ب}

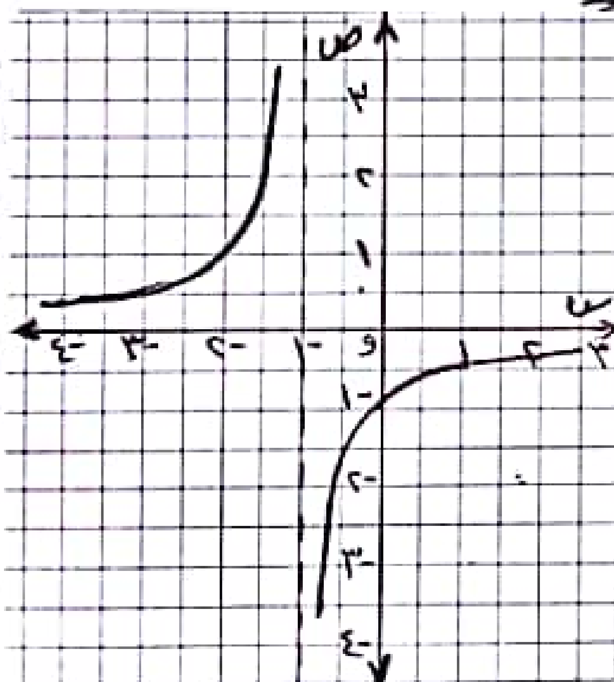
مداها = ح - {ح} ، نقطة تماثل المنحنى = (-ب ، ح)

* كما في الدالة التربيعية من أ نحدد الانعكاس والتمدد والانكماش ومن نقطة تماثل المنحنى نحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال

استخدم منحنى الدالة $د(س) = \frac{1}{س}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = \frac{-1}{س + 1}$ ثم ادرس الدالة

الحل



∵ $ر(س) = \frac{-1}{س + 1}$

∴ أ = -١ ، ب = ١ ، ح = صفر

∴ نقطة تماثل المنحنى = (-١ ، ٠)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو انعكاس لمنحنى الدالة $د(س) = \frac{1}{س}$ يتبعه إزاحة أفقية مقدارها ١ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة = ح - {٠}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها أحادية

الدالة تزايدية على الفترة]-∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

مثال

استخدم منحنى الدالة $د(س) = \frac{1}{س}$ في رسم منحنى الدالة $ر(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ثم ادرس الدالة

الحل

∵ ر(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ليست على الصورة العامة

بإجراء القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} ٣ & \\ ٣س - ٥ & س - ٢ \\ ٣س - ٦ & \\ \hline ٠ + ١ & \end{array}$$

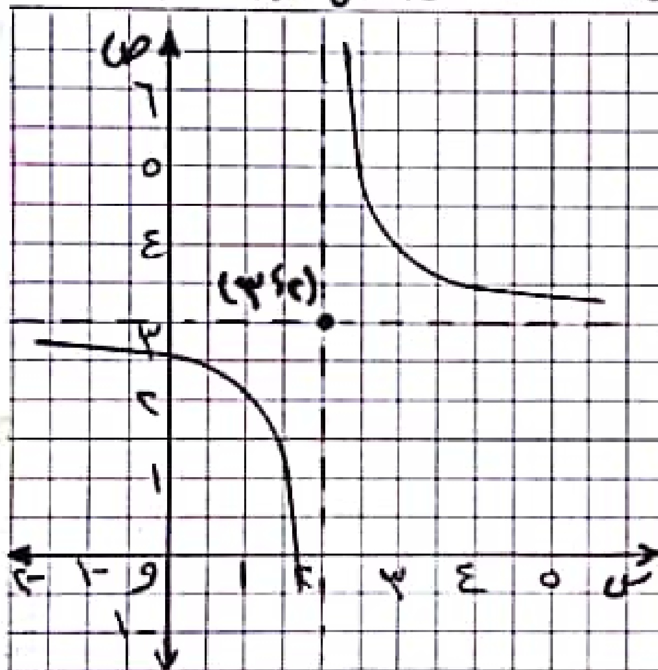
∴ ر(س) = ٣ + $\frac{١}{س - ٢}$

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ٣

⇐ نقطة تماثل المنحنى = (٢ ، ٣)

∴ منحنى الدالة ر(س) هو نفس منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$

بإزاحة أفقية قدرها ٢ في اتجاه وس→ يتبعها إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات في اتجاه وص←



مجال الدالة = ح - {٢}

مدى الدالة = ح - {٣}

الدالة ليست زوجية وليست فردية ولكنها دالة أحادية

الدالة تناقصية على الفترتين]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٥) دالة المقياس :-

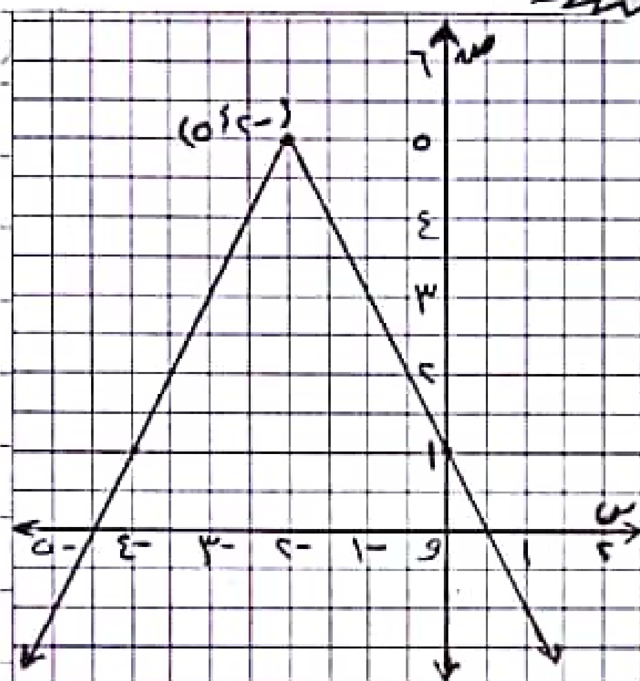
الصورة العامة هي ر(س) = أ|س + ب| + جـ

مجالها = ح ونقطة رأس المنحنى = (-ب ، جـ)

* كما في الدالة التربيعية ممدوه أ تحدد الانعكاس والتمدد والانكماش الرأسي ونقطة رأس المنحنى تحدد الإزاحة الأفقية والرأسية

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى الدالة ر(س) = ٥ − ٢|س + ٢| ثم ادرس الدالة

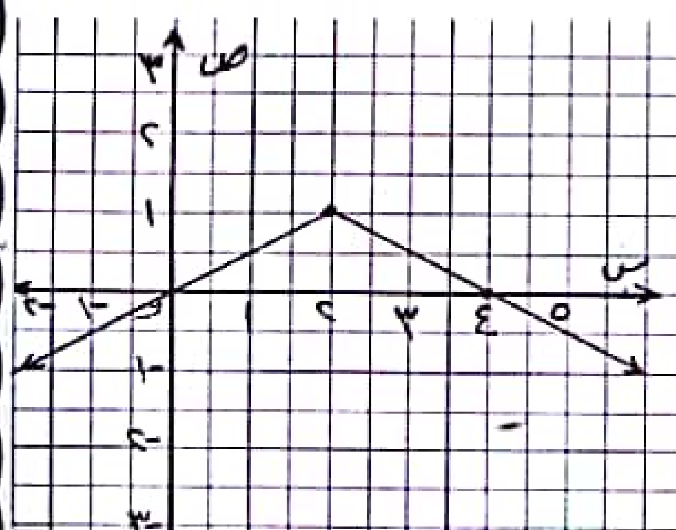
الحل



∵ ر(س) = ٥ − ٢|س + ٢|
∴ أ = −٢ ، ب = −٢ ، جـ = ٥
∴ نقطة رأس المنحنى = (−٢، ٥)
∴ منحنى الدالة ر(س) هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة د(س) = |س| يتبعه انعكاس في محور السينات يتبعه ثم ازاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و س← ثم ازاحة رأسية قدرها ٥ وحدات في اتجاه و ص↑

مجال الدالة = ح ومداها =]−∞، ٥] الدالة ليست زوجية أو فردية أو أحادية ، الدالة تزايدية في الفترة]−∞، −٢[وتناقصية في الفترة]−٢، ∞[

مثال استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في رسم منحنى الدالة ر(س) = ١ − |½س − ١|

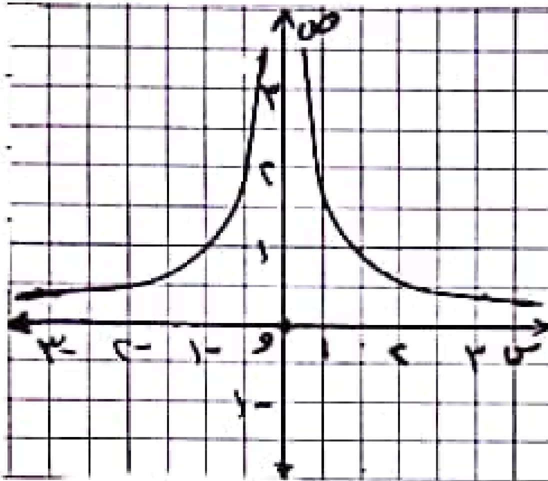


∴ ر(س) = ١ − |½(س − ٢)|
∴ ر(س) = ١ − ½|س − ٢|
∴ أ = −½ ، ب = −٢ ، جـ = ١
نقطة رأس المنحنى = (٢، ١)
* دراسة الدالة يترك للطالب

مثال إذا كانت $د(س) = \frac{1}{س}$ ارسم الشكل البياني للدالة ر(س) إذا كانت

(١) $ر(س) = |د(س)|$ (٢) $ر(س) = |د(س+١)| - ٢$

الحل



(١) ∵ $ر(س) = |د(س)|$

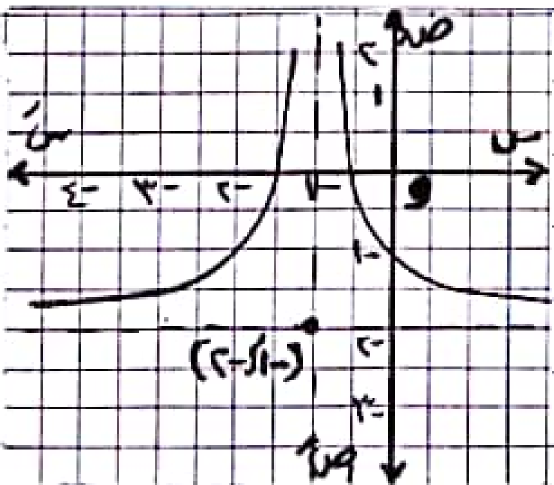
∴ $ر(س) = |\frac{1}{س}| = \frac{1}{|س|}$

∴ $ر(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{-1}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

مجال الدالة = ح - {٠}

مدى الدالة =]٠، ∞[

الدالة زوجية - الدالة ليست إطارية - الدالة تزايدية في الفترة]-∞، ٠[وتناقصية في الفترة]٠، ∞[



(٢) ∵ $ر(س) = |د(س+١)| - ٢$

∴ $ر(س) = |\frac{1}{س+1}| - ٢ = \frac{1}{|س+1|} - ٢$

∴ $ر(س) = \begin{cases} \frac{1}{س+1} - ٢ & س > -١ \\ \frac{-1}{س+1} - ٢ & س < -١ \end{cases}$

∴ مجال الدالة = ح - {-١}

مدى الدالة =]-٢، ∞[

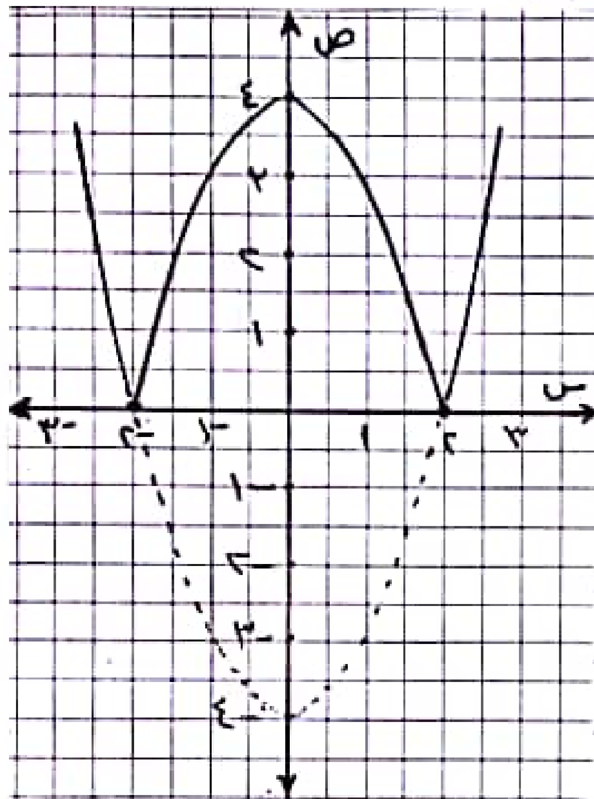
الدالة ليست زوجية وليست فردية وليست إطارية

الدالة تزايدية في الفترة]-∞، -١[وتناقصية في الفترة]-١، ∞[

مثال ٤ ارسم منحنى الدوال الآتية

(١) د(س) = |٤ - س٢| (٢) د(س) = |س٢ - ٢س - ٣| حيث س ∈ [-١، ٤]

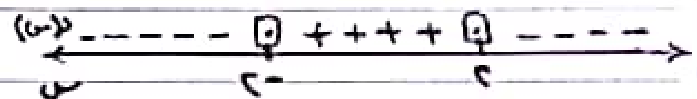




(١) ∵ د(س) = |٤ - س٢|

نقوم ببحث إشارة المقدار ٤ - س٢

وذلك بوضع ٤ - س٢ = ٠ ومنها س = ±٢



∴ د(س) = { ٤ - س٢ عندما س ∈ [-٢، ٢] ؛ س٢ - ٤ عندما س ∈ ح -]-٢، ٢[}

∴ مجال الدالة = ح

مدى الدالة = [٠، ∞[

الدالة زوجية وليست أحادية

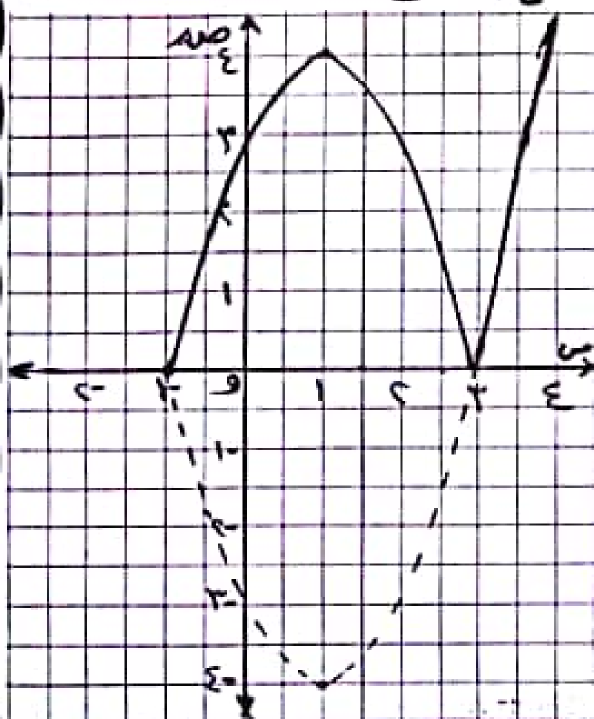
الدالة تناقصية في الفترتين]-∞، -٢[، [٠، ٢]

الدالة تزايدية في الفترتين [-٢، ٠] ، [٢، ∞[

(٢) ∵ د(س) = |س٢ - ٢س - ٣| لكل س ∈ [-١، ٤]

بوضع س٢ - ٢س - ٣ = ٠ ⇐ س = -١ ، س = ٣





∴ د(س) = { س٢ - ٢س - ٣ لكل س ∈ [٣، ∞[؛ صفر عندما س = -١ ؛ ٣ + ٢س - س٢ لكل س ∈]-١، ٣] }

دراسة الدالة متروك للطالب

النهايات

* مفاهيم هامة :-

(١) الكمية المعينة هي التي لها جواب محدد مثل $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٠}{٤}$ ، ....

(٢) الكمية الغير معرفة :- هي كمية ليس لها معنى مثل $\frac{٣}{صفر}$ لانه لا يوجد عدد حقيقي اذا ضرب × صفر كان الناتج = ٣

وبصفة عامة الكمية غير المعرفة = $\frac{أ}{صفر}$ حيث أ ∈ ح - {٠}

(٣) الكمية الغير معينة :- هي الكمية التي ليس لها جواب محدد مثل $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، صفر × ∞ ، (صفر)^{صفر} ، $(\infty)^{صفر}$ ، $(1)^{\infty}$

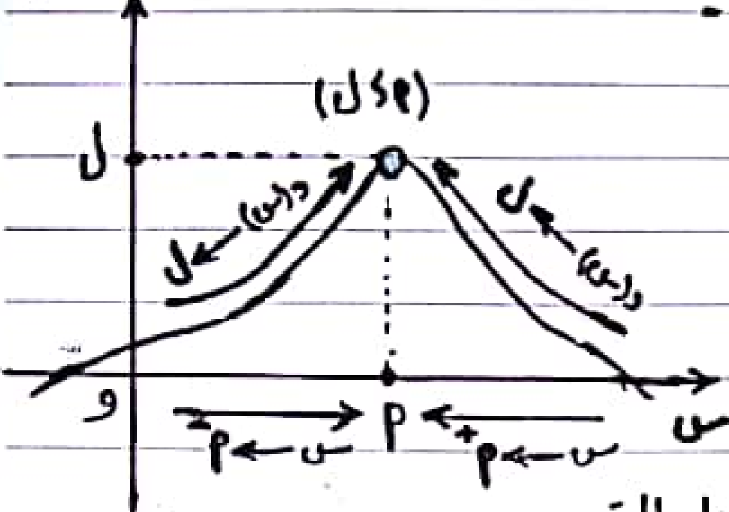
(٤) $\infty \pm$ أ = ∞ ، $-\infty \pm$ أ = $-\infty$

(٥) $\infty \times$ أ =
- ∞ عندما أ > ٠
- $-\infty$ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٦) $-\infty \times$ أ =
- $-\infty$ عندما أ > ٠
- ∞ عندما أ < ٠
- كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٧) اذا كانت د(س) = $\frac{1}{س}$ فان مجال الدالة = ح - {٠}
∴ د(٠) = $\frac{1}{صفر}$ كمية غير معرفة لذلك لا نستطيع ايجاد قيمة الدالة عند س = ٠ ولكن يمكن ايجاد قيمتها عندما تقترب س قرباً نهائياً من الصفر (س ← ٠)

* النهاية اليمنى للدالة :-



من الملاحظ أن فى الشكل المقابل يمثل الشكل البيانى لمنحنى دالة ما

* كلما اقتربت قيمة س من أ من ناحية اليمين فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل النهاية اليمنى للدالة عندما س تؤول الى أ وتكتب على الصورة $د(أ^{+}) = \lim_{س \to أ^{+}} د(س) = ل$

* النهاية اليسرى للدالة :-

ومن الملاحظ أيضاً كلما اقتربت س من أ من ناحية اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من (ل) لذلك تسمى ل بالنهاية اليسرى للدالة عندما س ← $أ^{-}$ وتكتب على الصورة $د(أ^{-}) = \lim_{س \to أ^{-}} د(س) = ل$

* نهاية دالة عند نقطة :-

يكون للدالة د(س) نهاية عند نقطة أ إذا كانت

$د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$ وتكون ل هى قيمة النهاية عندما س = أ أو س ← أ وتكتب على الصورة

$$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$$

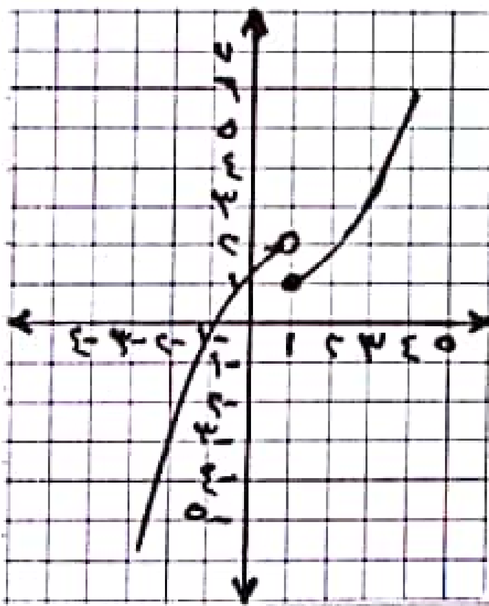
أما اذا كانت $د(أ^+) \neq د(أ^-)$ فان

$\lim_{س \to أ}$ د(س) تكون غير موجودة

ملاحظات هامة عند ايجاد نهاية الدالة د(س) عند نقطة (أ) نلاحظ الاتى

* لابد أن تكون الدالة معرفة فى جوار نقطة (أ) أى يكون للدالة مجال على يمين وعلى يسار (أ)
* نهاية دالة عند نقطة لا يلزم تعريفها عند هذه النقطة
* اذا كانت أ نقطة حدية فى مجال الدالة د(س) فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) تكون غير موجودة

* ايجاد نهاية دالة بيانياً :-



مثال

* فى الشكل المقابل نجد أن

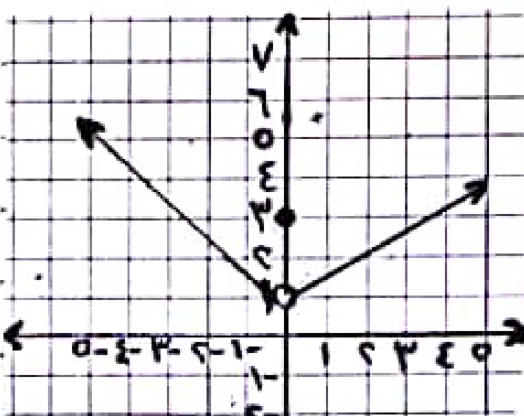
(١) د(١) = ١

(٢) $د(١^+) = ١$

(٣) $د(١^-) = ٢$

∴ $د(١^+) \neq د(١^-)$

∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة



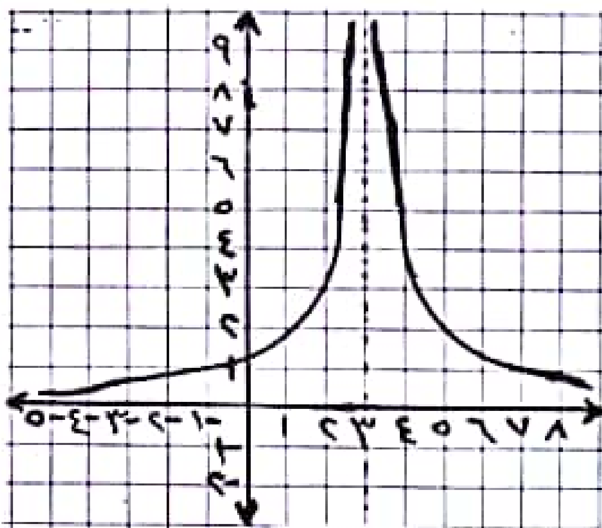
* فى الشكل المقابل :-

(١) د(٠) = ٣

$د(٠^+) = ١$

$د(٠^-) = ١$

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ١



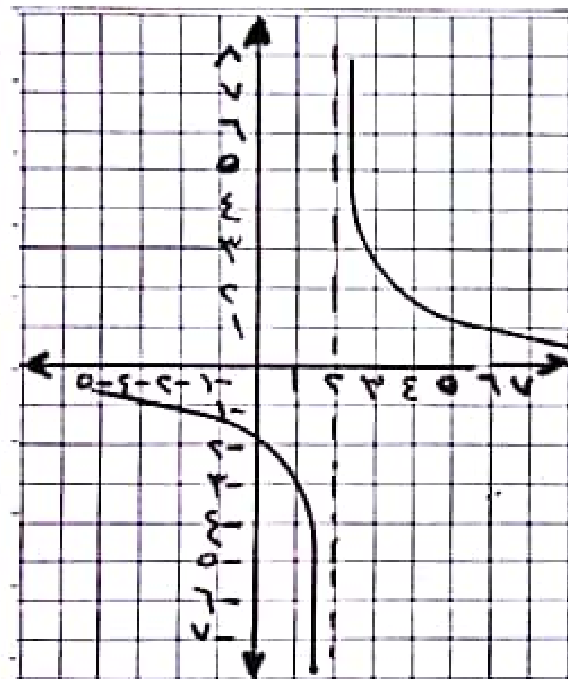
* في الشكل المقابل:

(١) د(٣) غير موجودة

(٢) د(٣^{+}) = ∞

(٣) د(٣^{-}) = ∞

(٤) ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ∞



* في الشكل المقابل:

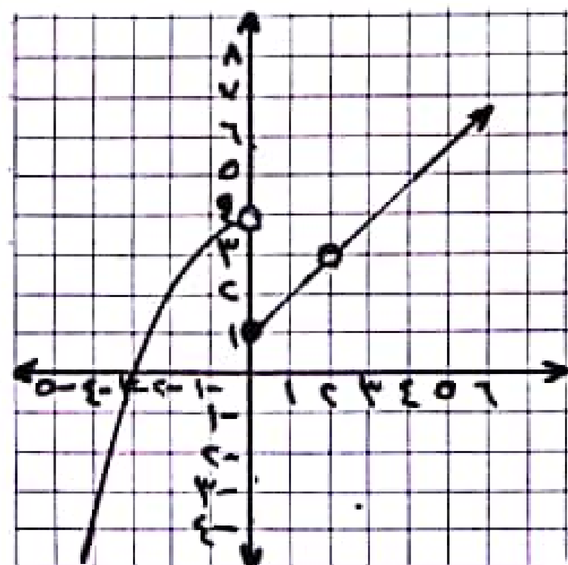
(١) د(٢) غير موجودة

(٢) د(٢^{+}) = ∞

(٣) د(٢^{-}) = $-\infty$

∴ د(٢^{+}) $\neq$ د(٢^{-})

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة



* في الشكل المقابل:

(١) د(٠) = ١

(٢) د(٠^{+}) = ١

(٣) د(٠^{-}) = ٤

(٤) ∴ د(٠^{+}) $\neq$ د(٠^{-})

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة

(٥) د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = ٣

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٣

إيجاد نهاية دالة جبريا

نظرية (١) اذا كانت الدالة د(س) دالة كثيرة حدود معرفة فى جوار نقطة (أ) فإن:

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ) (تعويض مباشر)

* نتيجة :-
اذا كانت د(س) دالة ثابتة حيث د(س) = ك فإنه

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = ك

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١)

(٢) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) حيث س ∈]٢ ، ∞[

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥)

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣س + ١ ∴ مجالها = ح
∴ الدالة معرفة فى جوار س = ٢
∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = د(٢) = ٧

(٢) ∵ مجال الدالة د(س) = ٣س + ١ يساوى]٢ ، ∞[
∴ س = ٢ نقطة حدية ∴ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س + ١) = غير موجودة

(٣) $\lim_{س \to -٣}$ (٥) = ٥ (دالة ثابتة)

نظرية (٢) اذا كانت د ، ر دالتين في المتغير س وكان $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) = ل

و $\lim\limits_{س \to ا}$ ر(س) = م فان :

(١) $\lim\limits_{س \to ا}$ [د(س) ± ر(س)] = $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) ± $\lim\limits_{س \to ا}$ ر(س) = ل ± م

أي أن نهاية مجموع دالتين = المجموع الجبري لنهايتيهما

(٢) $\lim\limits_{س \to ا}$ [د(س) × ر(س)] = $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) × $\lim\limits_{س \to ا}$ ر(س) = ل × م

اي أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب النهايتين

(٣) اذا كان ك عدد ثابت فان :

$\lim\limits_{س \to ا}$ ك د(س) = ك $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) = ك × ل

(٤) $\lim\limits_{س \to ا}$ $\frac{د(س)}{ر(س)}$ = $\frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠.

(٥) $\lim\limits_{س \to ا}$ $[د(س)]^{ن}$ = $[\lim\limits_{س \to ا} د(س)]^{ن}$ = $(ل)^{ن}$

ملاحظة

اذا كانت $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) = كمية غير معرفة

فان نهاية الدالة تكون غير معرفة وفي هذه الحالة نلجأ إلى الطريقة البيانية لتحديد ما إذا كانت

$\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) = ∞ أو $\lim\limits_{س \to ا}$ د(س) غير موجودة

* ما يراعى عند إيجاد نهاية دالة :-

عند إيجاد $\lim_{س \to ا}$ د(س) يجب أن نراعى الآتى :-

(١) معرفة مجال الدالة د(س) (ولو بمجرد النظر) فإذا كانت (ا) نقطة حدية فى مجال الدالة فإن :
$\lim_{س \to ا}$ د(س) تكون غير موجودة

(٢) إذا كانت الدالة معرفة فى جوار (ا) نستخدم التعويض المباشر فى قاعدة الدالة فإذا كان :-

* الناتج كمية معينة ← تكون هذه الكمية هى نهاية الدالة
* الناتج كمية غير معرفة ← فإن نهاية الدالة تكون غير معرفة ونلجأ الى الحل البيانى فى هذه الحالة لمعرفة ما إذا كانت $\lim_{س \to ا}$ د(س) = ∞ أو $\lim_{س \to ا}$ د(س) غير موجودة

* الناتج كمية غير معينة فإن الدالة يكون لها نهاية ولكن لابد من اختزال العامل الصفرى بإحدى الطرق المناسبة (تحليل - قسمة - ضرب فى المرافق ------)

مثال

أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٣}{س + ٣}$ (٢) $\lim_{س \to ٢}$ (-٥)

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س}$ (٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢}$

الحل

(١) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٣}{س + ٣} = \frac{٠ - ٣}{٠ + ٣} = -١$ (كمية معينة)

(٢) ∵ $\lim_{س \to ٢} (-٥) = -٥$ (نهاية العدد الثابت = العدد الثابت)

(٣) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س} = \frac{٠ - ٠}{٠} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{س(س - ١)}{س} = \lim_{س \to ٠} (س - ١) = -١$

(٤) ∵ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{صفر}$ كمية غير معرفة أى أن النهاية

غير معرفة لذلك نلجأ الى الحل البياني

ومن الشكل البياني لمنحنى الداله نجد أن

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ①

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{١}{س^٢} = \infty$ ②

∴ من ① ، ② ينتج أن

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \infty$

مثال

أوجد النهايات الاتية

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢}$ (٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٢ - ٩}$

الحل

(١) ∵ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

باستخدام التحليل ينتج

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{س}+١} = \frac{٢}{٣}$$

(٤) $\because \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢+٤\text{س}+٣}{\text{س}^٢-٩} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)}$

$\therefore \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+١}{\text{س}-٣} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$

مثال

أوجد النهايات الآتية :

(١) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢+٤\text{س}+٤}{\text{س}^٣+\text{س}^٢-٨\text{س}-١٢}$ (٢) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+\sqrt{\text{س}}-١٢}{\text{س}-٩}$

الحل

(١) البسط مقدار ثلاثي بسيط سهل التحليل $= (\text{س}+٢)(\text{س}+٢)$

اما المقام نستخدم القسمة التركيبية لتحليله كالاتي

① نرتب المقدار ترتيباً تنازلياً $\text{س}^٣+\text{س}^٢-٨\text{س}-١٢$

	١	١	٨-	١٢-
٢-	↓	٢-	٢	١٢
	١	١-	٦-	• هو باقي القسمة
	معامل $\text{س}^٢$	معامل س	الحد المطلق	

$\because \text{س}\to -٢$

$\therefore$ العامل الصفري $= (\text{س}+٢)$

$\therefore \text{س}^٣+\text{س}^٢-٨\text{س}-١٢ = (\text{س}+٢)(\text{س}^٢-\text{س}-٦)$

$\therefore \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}+٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}^٢-\text{س}-٦)}$

$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-\text{س}-٦} = \frac{\text{صفر}}{٤+٢-٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ بالتحليل مرة آخرى

∴ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٣)} = \frac{١}{-٥} = \frac{-١}{٥}$

(٢) ∵ $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ١٢}{\text{س} - ٩} = \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٩ + \sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩}$

$= \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س} - ٩}{\text{س} - ٩} + \frac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{(\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + ٣)} \right]$

$= \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \left[١ + \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + ٣} \right] = ١ + \frac{١}{٦} = \frac{٧}{٦}$

مثال

أوجد النهايات الآتية :-

(١) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$ (٢) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$

الحل

(١) بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

∴ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٥} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٥} + ٢} \right)$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \left(\frac{(\text{س} + ١)(\sqrt{\text{س} + ٥} + ٢)}{\text{س} + ٥ - ٤} \right)$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} (\sqrt{\text{س} + ٥} + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$

(٢) بالضرب × مرافق البسط بسطاً ومقاماً

∴ $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \left[\frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥} \times \frac{\sqrt{\text{س} - ١} + ٢}{\sqrt{\text{س} - ١} + ٢} \right]$

$= \underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س} - ٥}{(\text{س} - ٥)(\sqrt{\text{س} - ١} + ٢)} \right] = \frac{١}{٤}$

مثال أوجد النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to 5} \sqrt{س-1}$ (٢) $\lim_{س \to 1} \sqrt{س-1}$

(٣) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2+2س-3}{(س-1)^2}$ (٤) $\lim_{س \to 2} \sqrt{4-س^2}$

الحل

(١) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س-1}$ هو $[1، \infty[$

∴ س = ٥ ليست نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim_{س \to 5} د(س) = \lim_{س \to 5} \sqrt{س-1} = \sqrt{4} = 2$

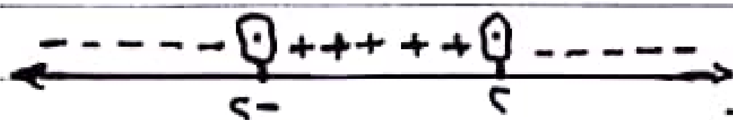
(٢) ∵ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س-1}$ هو $[1، \infty[$

∴ س = ١ نقطة حدية ∴ $\lim_{س \to 1} \sqrt{س-1}$ غير موجودة

(٣) ∵ $\lim_{س \to 1} \frac{س^2+2س-3}{(س-1)^2} = \lim_{س \to 1} \frac{(س+3)(س-1)}{(س-1)^2}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س+3}{س-1} = \frac{4}{صفر}$ ∴ النهاية غير موجودة

(٤) إيجاد مجال الدالة



∴ مجال الدالة $د(س) = \sqrt{4-س^2}$

$= [-2، 2]$

∵ س = ٢ نقطة حدية في مجال الدالة

∴ $\lim_{س \to 2} \sqrt{4-س^2}$ غير موجودة

يمكن أن نقول

إذا كانت نهــا (س ← أ) ق(س) / (س − أ) = ل

حيث ق(س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (س² + ب س + حـ)

(١) ق(أ) = صفر

(٢) ق(س) = (س − أ)(س − أ + ل)

أي أن دالة البسط = العامل الصفري × (العامل الصفري + النهاية)

مثال

(١) إذا كانت نهــا (س ← ٢) أ / (س + ١) = ٤ فإن أ = ...

(٢) إذا كانت نهــا (س ← ٢) (د(س) − ٥) / (س − ٢) = ١ فإن نهــا (س ← ٢) د(س) = ...

(٣) إذا كانت نهــا (س ← ١) (س² + أ س + ب) / (س − ١) = ٥ فإن أ = ... ، ب = ...



(١) ∵ نهــا (س ← ٢) أ / (س + ١) = ٤ ⇐ ∴ د(٢) = ٤ ∴ أ / ٣ = ٤ ⇐ أ = ١٢

(٢) ∵ نهــا (س ← ٢) (د(س) − ٥) / (س − ٢) = ١ لها نهاية ∴ د(٢) = صفر / صفر

∴ د(س) − ٥ = ٠ منها د(س) = ٥ ⇐ نهــا (س ← ٢) د(س) = ٥

(٣) ∵ نهــا (س ← ١) (س² + أ س + ب) / (س − ١) = ٥

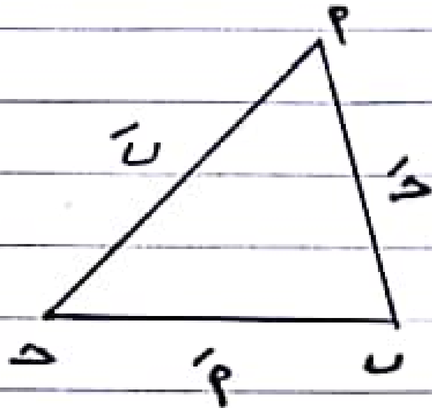
∴ س² + أ س + ب = (س − ١)(س − ١ + ٥)

∴ س² + أ س + ب = (س − ١)(س + ٤)

∴ س² + أ س + ب = س² + ٣س − ٤ وبمقارنة المعاملات

أ = ٣ ، ب = −٤

قانون الجيب



* قاعدة الجيب :-

في أي مثلث تتناسب أطوال الأضلاع مع جيوب الزوايا المقابلة لها .

أي أنه في Δ أ ب حـ يكون

$$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$$

مثال

في Δ أ ب حـ إذا كان أَ = ١٠ سم ، ق(أ) = ٣٠° ، ق(ب) = ٤٥° أوجد كلاً من بَ ، حَ وكذلك مساحة Δ أ ب حـ

الحل

∵ أَ = ١٠ سم ، ق(أ) = ٣٠° ، ق(ب) = ٤٥° ∴ ق(حـ) = ١٠٥°

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{حا } ٣٠°} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا } ٤٥°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا } ١٠٥°}$

منها بَ = $\frac{١٠ \text{ حا } ٤٥°}{\text{حا } ٣٠°}$ منها بَ = ١٤,١ سم

∴ حَ = $\frac{١٠ \text{ حا } ١٠٥°}{\text{حا } ٣٠°}$ منها حَ ≃ ١٩,٣ سم

∵ مساحة Δ أ ب حـ = نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ × حا ٣٠°

∴ مساحة Δ أ ب حـ = ٦٨ سم² تقريباً

مثال إذا كان Δ س ص ع محيطه ١٨ سم وكان $\frac{1}{2}$ جا س = $\frac{1}{3}$ جا ص = $\frac{1}{4}$ جا ع أوجد أطوال أضلاع المثلث

الحل

∵ $\frac{\text{جا س}}{٢} = \frac{\text{جا ص}}{٣} = \frac{\text{جا ع}}{٤}$ منها $\frac{٢}{\text{جا س}} = \frac{٣}{\text{جا ص}} = \frac{٤}{\text{جا ع}}$

∴ سَ : صَ : عَ = ٢ : ٣ : ٤

∴ سَ = ٢م ، صَ = ٣م ، عَ = ٤م ← ①

∵ محيط Δ س ص ع = ١٨ سم ∴ ٩م = ١٨ ← ∴ م = ٢

∴ سَ = ٤ سم ، صَ = ٦ سم ، عَ = ٨ سم

مثال أكمل ما يأتي:

(١) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{....}$

(٢) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}} =$ ....

الحل

(١) ∵ في Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$

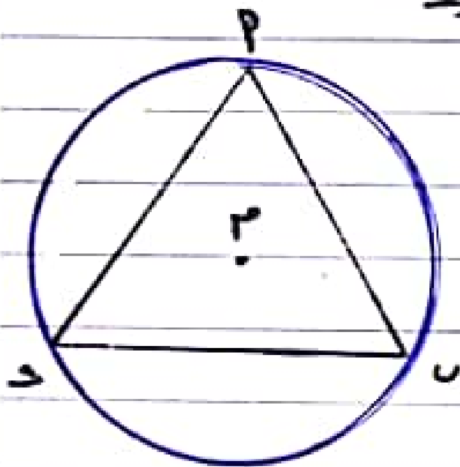
منها $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ باستخدام خواص النسبة ينتج $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ + جا ب}}$

(٢) ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ ∵ ق(حـْ) = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا (أ + ب)}}$ منها $\frac{\text{أَ + بَ}}{\text{جا أ + جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا (أ + ب)}}$

∴ $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{أَ + بَ}}$

تمرين مشهور



في أي مثلث أ ب جـ يكون

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

(المارة برؤوس Δ أ ب جـ)

مثال

أكمل ما يأتي :

(١) اذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ فإن $\frac{أ}{٢ جا أ} = ...$

(٢) اذا كان طول ضلع في مثلث ما = ١٢ سم وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥° فإن محيط الدائرة المارة برؤوسه يساوي.....

الحل

(١) ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$ ومنها $\frac{أ}{جا أ} = ٢ نق$

∴ $\frac{أ}{٢ جا أ} = نق$

(٢) بفرض أن أ = ١٢ سم ، ق(∠أ) = ٥٥°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = ٢ نق$ ∴ $نق = \frac{٦}{جا ٥٥°} \simeq ٧٫٣ سم$

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق

$\simeq ٤٦$ سم

مثال أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم²

$ق(\hat{ب}) = ٨٢°$ ، $ق(\hat{جـ}) = ٥٦°$ فما أ

الحل

∵ $ق(\hat{ب}) = ٨٢°$ ، $ق(\hat{جـ}) = ٥٦°$ ∴ $ق(\hat{أ}) = ٤٢°$

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{أ}{جا ٤٢°} = \frac{ب}{جا ٨٢} = \frac{جـ}{جا ٥٦}$ ①

∵ مساحة سطح المثلث أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ ب جا جـ

∴ $٤٥٠ = \frac{1}{2}$ أ × ب جا ٥٦° ← ②

من ① ينتج أن ب $= \frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°}$ بالتعويض في ①

∴ $٤٥٠ = \frac{1}{2}$ أ × $\frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°}$ × جا ٥٦° منها أ = ٢٧,١ سم

مثال اذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٠ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٤٤°$

$ق(\hat{ب}) = ٦٦°$ أوجد اطوال أضلاع Δ أ ب جـ

الحل

∵ $ق(\hat{أ}) = ٤٤°$ ، $ق(\hat{ب}) = ٦٦°$ ∴ $ق(\hat{جـ}) = ٧٠°$

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$ منها $\frac{أ + ب + جـ}{جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°}$ = كل نسبة

$\frac{٤٠}{٢,٥٥} \simeq ١٥,٧ \simeq$ كل نسبة ∴ منها أ = ١٥,٧ جا ٤٤° ≃ ١٠,٩ سم

∴ ب = ١٥,٧ جا ٦٦° = ١٤,٣ سم

∴ جـ = ١٥,٧ جا ٧٠ = ١٤,٨ سم

مثال أ ب جـ مثلث فيه ق(أ̂) = ٦٠° ، ق(ب̂) = ٤٥°
وكان أ + ب = (√٦ + ٢) سم أوجد أ ، ب

الحل

∵ ق(أ̂) = ٦٠° ، ق(ب̂) = ٤٥° فإن ق(جـ̂) = ٧٥°

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا }60^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا }45^\circ}$ من خواص

التناسب ينتج $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جا }60^\circ + \text{جا }45^\circ}$ = كل نسبة ⇐ ∴ كل نسبة = ٢√٢

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا }60^\circ}$ = ٢√٢ منها أ = √٦ سم

$\frac{\text{ب}}{\text{جا }45^\circ}$ = ٢√٢ منها ب = ٢ سم

مثال في أي مثلث أ ب جـ أثبت أن

(١) $\frac{\text{٣أ} - \text{٤ب}}{\text{٣جا أ} - \text{٤جا ب}}$ = ٢نق حيث نق نصف قطر الدائرة الخارجية للمثلث

(٢) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ}^2 \text{ جا ب جا جـ}}{\text{٢جا أ}} = \frac{\text{أ ب جـ}}{\text{٤ نق}}$

الحل

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢نق بضرب حدي النسبة الأولى × ٣
وحدي النسبة الثانية × −٤

∴ $\frac{\text{٣أ}}{\text{٣جا أ}} = \frac{\text{−٤ب}}{\text{−٤جا ب}}$ = ٢نق باستخدام خواص التناسب

∴ $\frac{\text{٣أ} - \text{٤ب}}{\text{٣جا أ} - \text{٤جا ب}}$ = ٢نق ← أولاً

(٢) ∵ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ ← ①

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب}$ منها $بَ = \frac{أَ \, جا ب}{جا أ}$ بالتعويض في ①

∴ مساحة △ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أَ × $\frac{أَ \, جا ب}{جا أ}$ × جا ج = $\frac{أَ^2 \, جا ب \, جا ج}{2 \, جا أ}$ = الأيسر

(3) ∵ مساحة △ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا ج ← ①

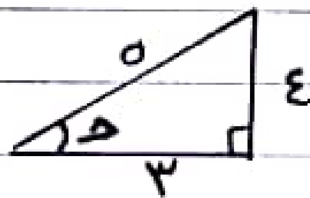
∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جَ}{جا ج} = 2$ نق منها جا ج = $\frac{جَ}{2 \, نق}$

بالتعويض في ① ينتج مساحة △ أ ب ج = $\frac{أَ \, بَ \, جَ}{4 \, نق}$

مثال

أ ب ج مثلث منفرج الزاوية في أ فيه بَ = 5 سم ، ظا ج = $\frac{4}{3}$ ، ق(ب) = 30° أوجد لأقرب سم كلاً من أَ ، جَ ، مساحة △ أ ب ج

الحل



∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جَ}{جا ج}$

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{5}{جا 30°} = \frac{جَ}{\frac{4}{5}}$ ∴ $\frac{أَ}{جا أ} = 10 = \frac{5 جَ}{4}$

∴ جَ = 8 سم ← ①

∵ △ أ ب ج منفرج الزاوية في أ ← ∴ ج حادة حيث ظا ج = $\frac{4}{3}$

∴ ق(ج) = 53° 7′ 48″ ← ∴ ق(أ) = 180 − (ب + ج)

∴ ق(أ) = 96° 52′ 12″

∵ $\frac{أَ}{جا (96,87)} = 10$ منها أَ = 10 سم ← ②

∴ مساحة △ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أَ جَ جا ب = $\frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{1}{2}$

= 20 سم²